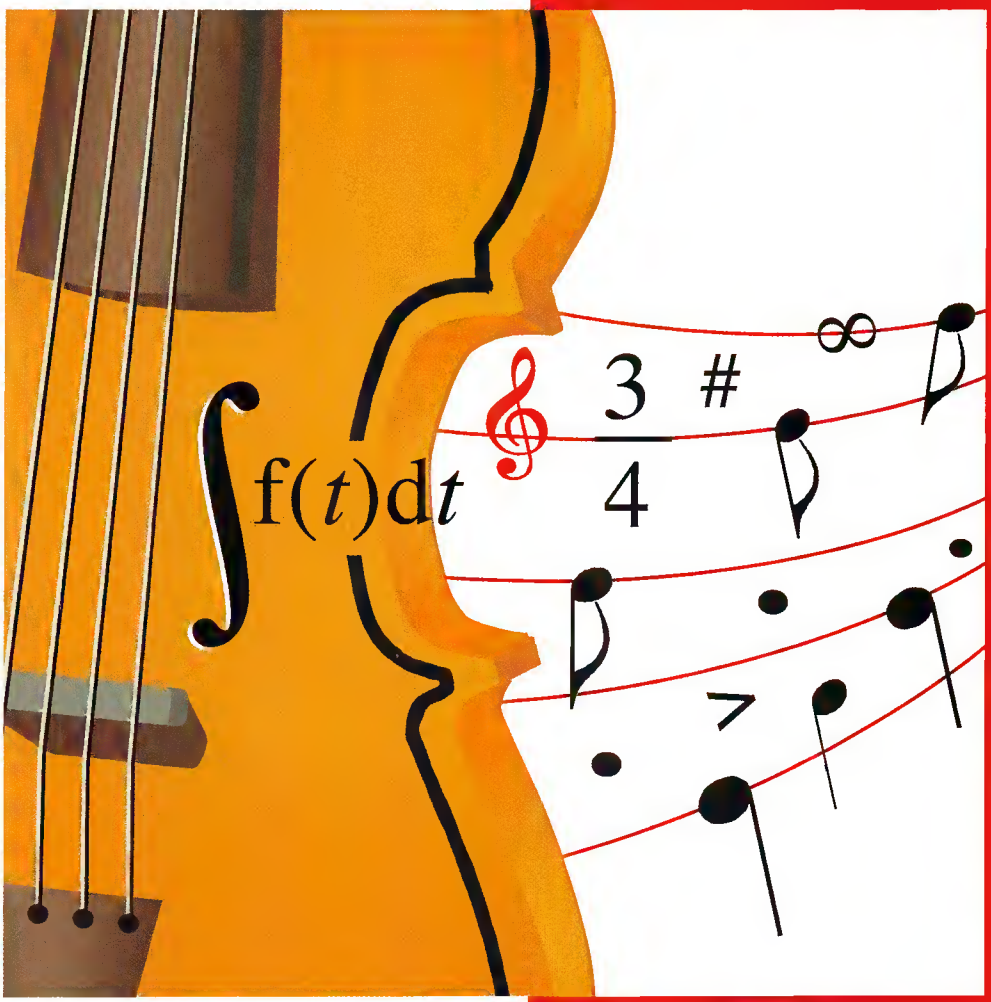
Bibliothèque Tangente
L'aventure mathématique

Maths & musique



Des destinées parallèles...

HS n° 11
ISSN 0987-0806
POLE

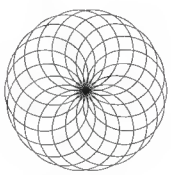
Bibliothèque Tangente
L'aventure mathématique

Tangente Hors-série n° 11

Maths & musique

Des destinées parallèles

Sous la direction de Gilles Cohen



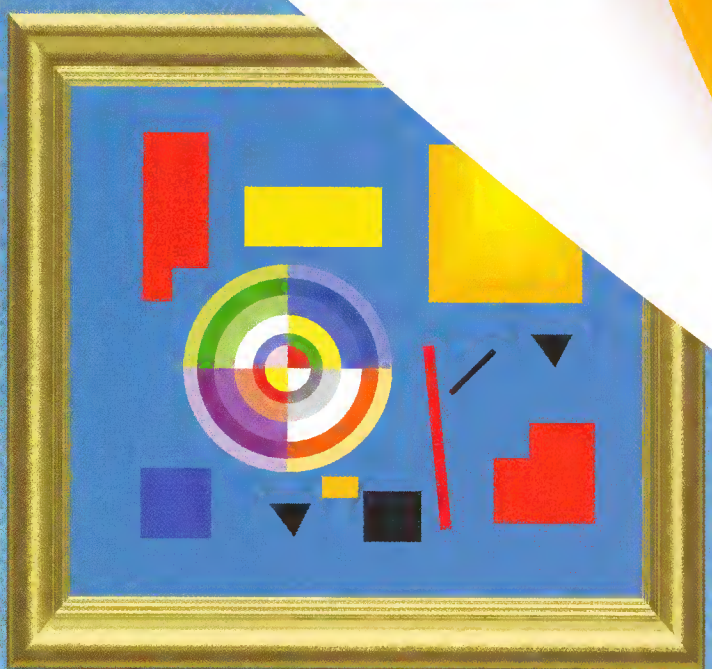
POLE

© Éditions POLE - Paris 2005
Toute représentation, traduction, adaptation ou reproduction, même partielle, par tous procédés, en tous pays, faite sans autorisation préalable est illicite, et exposerait le contrevenant à des poursuites judiciaires. Réf. : Loi du 11 mars 1957.
I.S.B.N. 2-84884-033-1 I.S.S.N. 0987-0806 Commission paritaire 1006 K 80883

Bibliothèque Tangente
L'aventure mathématique

Prochainement dans la Bibliothèque Tangente

Mathématiques et arts plastiques



POLE

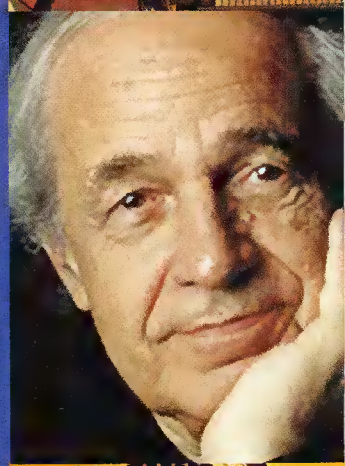
Sommaire

DOSSIER Les fondements

5

Mathématiques et musique sont deux langages universels aux origines communes et aux évolutions parallèles. Voyons comment, depuis l'Antiquité, la reine des sciences se propose de percer les secrets de l'harmonie.

Musique et mathématiques : des destinées parallèles 6
Mathématiques et musique : une origine commune 10
L'harmonie des pythagoriciens 14
La moyenne harmonique ou comment accorder les fréquences 18
L'impossible quête de l'échelle parfaite 22
La musique des mathématiques orientales 26
De la gamme chromatique aux congruences 32
Accord perdu : les mathématiques de la guitare 36
Le tempérament égal à travers le monde 42



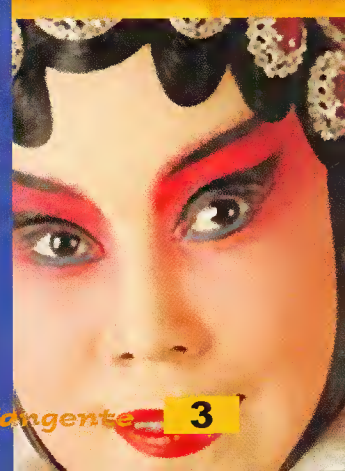
DOSSIER La composition

45

Les mathématiques ont largement nourri l'inspiration de compositeurs contemporains comme Pierre Boulez ou Yannis Xenakis. Ceux des siècles passés, tels Bach et Haydn, avaient déjà la fibre mathématique.

Symétrie et composition 46
Composition automatique et ordinateur 52
Pierre Boulez, celui qui a institutionnalisé la musique 56
Des matrices pour influencer le hasard 60
Iannis Xenakis 62
Bach mathématicien ? 68
3 minutes quatorze de bonheur 76
Schœnberg le maître de la musique moderne 82

Cher non-initié 13,21



(Suite du sommaire en page 4)

DOSSIER La technologie 85

Sous la musique, les maths ! Depuis le XIXe siècle et Fourier, on sait que le son se décompose en sinusoïdes. De là, la technologie numérique peut entrer en scène pour reconstituer la musique à partir de nombres.

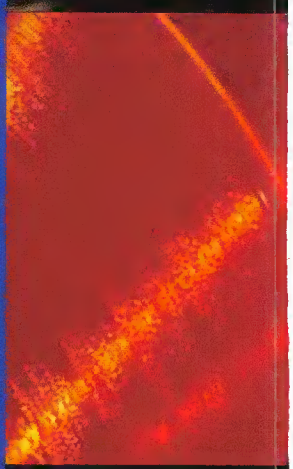
Les matheux sont-ils prédisposés pour la musique ? 86
La décomposition de Fourier 90
Un filtre en canon 94
MP3 : le son compressé 96
Les métamorphoses d'une sinusoïde 100
Faire un son avec d'autres sons 104

DOSSIER Lieux et figures 107

Regard sur quelques lieux et figures emblématiques de la musique. Voyage à la Cité de la musique à Paris et à l'Opéra de Pékin. Voyage également avec des musiciens connus et moins connus.

La Cité de la musique 108
L'Opéra de Pékin 111
Leonard Bernstein 112
Alain Connes, pianiste 113
Femmes et musique 114
Les arêtes du cube 116
Ernest Ansermet, mathématicien et musicien 118
Tom Johnson 121
Michel Deneuve, cristaliste 122
Du club de maths au CD professionnel 126
Francis Reynès, le matheux chantant 132

Jeux et énigmes 31
Solutions des jeux et énigmes 41
Problèmes 125, 135
Solutions des problèmes 136, 137



Musique et mathématiques : des destinées parallèles p. 6
Mathématiques et musique : une origine commune p. 10
L'harmonie des pythagoriciens p. 14
La moyenne harmonique
ou comment accorder les fréquences p. 18
L'impossible quête de l'échelle parfaite p. 22
La musique des mathématiques orientales p. 26
De la gamme chromatique aux congruences p. 32
Accord perdu : les mathématiques de la guitare p. 36
Le tempérament égal à travers le monde p. 42

Les fondements

Mathématiques et musique sont deux langages universels. Les Grecs anciens les ont dotés d'une origine commune et il semble que leur évolution se soit faite de manière parallèle. Ainsi, la théorie pythagoricienne des proportions avait pour but de percer les secrets de l'harmonie. En d'autres lieux, Chine, Afrique ou Moyen-Orient, les problèmes d'échelle musicale se résolvent aussi avec des mathématiques.

par É. Busser, G. Cohen & D. Souder

Musique et mathématiques
des destinées parallèles

Parmi les domaines artistiques qui peuvent être éclairés d'un regard mathématique, la musique est probablement celui qui s'y prête le mieux. D'ailleurs, chez les Grecs anciens, musique et mathématiques ont une origine commune. Leur évolution aussi s'est faite de manière parallèle.

Selon la tradition pythagoricienne, reprise par les philosophes arabes, la musique est avant tout question de proportions : l'esthétique musicale réside dans les « nombres » qui président à la constitution des intervalles.

La gamme, par définition discrète, c'est-à-dire non continue, a été créée par l'école pythagoricienne pour répondre à des critères autant numériques qu'esthétiques ou, si l'on préfère, pour associer à la réalité d'un phénomène physique, le son, mouvement vibratoire de l'air, un concept mathématique, celui de fréquence de cette vibration et de rapport entre les différentes fréquences. Les considérations arithmétiques et esthétiques se rejoignent de manière évidente dans l'esprit des Grecs. Pour eux, ce n'est pas par hasard que le rapport de hauteur de son de 1 à 2 correspond à l'octave : c'est la preuve de cette harmonie de l'univers régie par les nombres et les accords les plus harmonieux de la musique s'expriment par les rapports les plus simples de l'arithmétique.

Depuis les Grecs, la gamme n'a cessé de s'étendre, des cinq tons de la gamme pentatonique initiale à la gamme heptatonique de Pythagore (sept tons), celle des touches blanches du piano. Il y a aussi la gamme chromatique avec son échelle à douze notes, celle qu'on joue sur les touches blanches et noires du piano : do, do#, ré, ré#, mi, fa, sol, sol#, la la#, si, do, certaines gammes arabes possèdent un intervalle de 1/2 de ton, on a aujourd'hui des gammes à degrés inégaux, une combinatoire infinie des tonalités.

Multiplier la fréquence par 3/2 c'est passer à la quinte supérieure (comme de do à sol), la multiplier par 4/3 c'est passer à la quarte supérieure (comme de sol à do)

De l'emploi du mot harmonique

Lorsqu'on interprète aujourd'hui le travail des Grecs on parle de fréquences de sons, de phénomènes vibra-

toires, mais leur système musical était construit sur la position des doigts sur les cordes de la lyre ou même sur un instrument plus simple, le *monocorde*. Les musiciens, devenus par la suite théoriciens de la musique, ont très vite constaté que plus la corde vibrante est longue, plus le son est grave, plus elle est courte, plus le son est aigu. Des chevalets permettaient de faire varier la longueur de la corde. En plaçant l'un d'eux exactement au milieu de la corde, les Pythagoriciens ont constaté que les deux moitiés donnaient le même son : nous dirions de nos jours « un son de même fréquence ». Ce son ressemble d'ailleurs beaucoup à celui donné par la corde entière, mais en plus aigu : on dit qu'il est « à l'octave » et sa fréquence est double de celle du son initial. Ainsi, les anciens Grecs découvrirent les premiers termes de la suite des harmoniques, de fréquences successives f, $2f$, $3f$, $4f$.

On retrouve d'ailleurs ce mot dans le vocabulaire mathématique pour décrire la position de points sur un intervalle puisqu'on parle de division harmonique, de moyenne harmonique.

Le système tonal arabe, mis en place dès le IX^{e} siècle par Al Farabi, est lui aussi lié à la position des frettes sur le manche du « oud ». Là, on divise l'octave en 25 intervalles inégaux, dont certains seulement sont issus des gammes pythagoriciennes. Les Chinois, eux, fondent leur système musical sur la place des trous sur une flûte en bambou.

Nous restons cependant là dans des rapports rationnels. Ce n'est qu'au XVIII^{e} siècle qu'on admettra que des sons harmonieux peuvent néanmoins provenir de rapports de fréquences irrationnels. D'Alembert, par exemple, dans ses *Éléments de musique* (1752), insiste sur les douze demi-tons égaux de la gamme tempérée. On passe dans

Quelques correspondances marquantes entre développements de la musique et des mathématiques

• VI^{e} siècle avant J.-C. : la gamme pythagoricienne fondée sur les nombres entiers, précède de trois siècles les travaux d'Euclide.

• Vers 1000 : utilisation de portées et de points (Guido d'Arezzo), 3 siècles avant les coordonnées d'Oresme, et 7 siècles avant la géométrie analytique de Descartes.

• Entre 1700 et 1800 : les structures tonales, la polyphonie et l'invention des macroformes (fugue, sonate) sont en avance sur les mathématiques : la fugue par exemple est un automatisme abstrait 200 ans avant la naissance de l'automatique, les 4 variations de la mélodique en contrepoint sont des manipulations inconscientes des groupes finis (groupes de Klein).

• 1920 : le système sériel de Schönberg formalise les macrostructures. La musique a pris un temps de retard par rapport à la structuration de la théorie des nombres (1500 les rationnels, 1600 les réels)

• 1950 : seconde formalisation des macrostructures avec utilisation de permutations symétriques, nombres premiers et rythmes non rétrogradables (Olivier Messiaen).

• 1953 : introduction des échelles continues de hauteurs et de temps (utilisation des nombres réels) dans le calcul des caractéristiques du son, même si pour des raisons de perception et d'interprétation, les nombres réels sont approchés par des rationnels.

• 1960 : axiomatique des gammes musicales grâce à la théorie des cribles, et à l'introduction des nombres complexes dans la composition musicale (Xenakis).

• 1970 : introduction de la *discontinuité continue* à l'aide des lois de probabilité (parcours aléatoire, mouvement brownien) dans la micro structure des sons et les macrostructures.

Rappel : l'invention des nombres complexes (Euler, Gauss), des quaternions (Hamilton), la définition de la continuité (Cauchy), et l'invention des structures de groupes (Galois, Abel) datent des XVIII^{e} et XIX^{e} siècles.

« Quand j'étais enfant, j'aimais les nombres premiers, par le simple fait qu'ils ne sont pas divisibles et dégagent une force occulte » (Olivier Messiaen)

ce cas de la fréquence f à la fréquence $2f$ de l'octave par douze multiplications successives par un certain nombre k. Ainsi, comme $k^{12} = 2$, $k = \sqrt[12]{2}$. Ce rapport k de fréquences, on ne peut plus irrationnel, correspond à l'intervalle du demi-ton tempéré , son carré k^2 correspondant au *ton tempéré*, qui est cette fois exactement le double du demi-ton.

C'est le début de l'utilisation d'une échelle logarithmique pour représenter les intervalles et on notera que c'est au mathématicien d'Alembert qu'on doit ce traité. Un peu plus tôt, en 1739, Euler avait publié son *Testamen novae theoriae musicae* qui développait pleinement, à l'opposé de d'Alembert, sa conception de la musique comme branche des mathématiques. Alors, est-on prédisposé pour la musique quand on est mathématicien ? Ou est-ce simplement une parenté naturelle ? Les musiciens, même s'ils le regrettent, disent parfois que la prédisposition n'est pas symétrique, mais de nombreux exemples sont là pour prouver le contraire.

L'écriture musicale

La composition musicale a elle aussi trouvé de l'inspiration dans les mathématiques. Il existe par exemple dans la technique de composition de Bach certaines règles très mathématiques. Dans le canon *La Rose des Sables*, Bach expose le modèle sur 21 demi-temps, puis l'imitation est reprise sur 13 demi-temps, ensuite sur 8 puis sur 5, sur 3, sur 2 et sur 1 pour finalement disparaître. Ne reconnaît-on pas là les termes de la suite de Fibonacci ? De nombreux compositeurs ont également fait usage de la symétrie dans leurs œuvres. Il existe quelques exemples simples de ces airs connus comme « Ah, vous dirai-je maman » dont la mélodie, écrite par mouvement contraire, est de Mozart . Ce dernier a même fait mieux : il a composé la transcription pour guitare d'un canon à deux voix… sur la même partition, qui se lit à l'endroit comme à l'envers, écrite pour deux musiciens se faisant face, un véritable palindrome musical. Haydn, dont Mozart avait été l'élève, a lui aussi composé une symphonie, la « n° 6 » baptisée *Das Palindrom* dont le menuet reprend à l'envers les dix premières mesures de la première partie. Plus près de nous, Schönberg utili-

se dans sa musique dodécaphonique une série musicale de douze tons chromatiques et la reproduit en miroir, puis la reprend en commençant par la fin, la reproduit à nouveau en miroir pour enfin la transposer dans chacun des douze tons de la gamme chromatique, créant ainsi les quarante-huit séries possibles. Il travaillait ainsi sur le groupe des permutations de la série des douze tons de la gamme chromatique et sur un de ses sous-groupes, appelé « sous-groupe de Schönberg » engendré par les douze « décalages » qui sont en fait douze translations obtenues en identifiant chaque note à une classe d'équivalence modulo 12, les douze symétries et le « retournement » dans $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$. Après Schönberg, on pense évidemment à Xenakis et Boulez qui, eux, utilisent carrément dans leurs écritures musicales des matrices déterminées aléatoirement sur ordinateur et composent à l'aide d'algorithmes : c'est la musique stochastique.

Le son numérique

Les techniques numériques ont mis en évidence un nouveau champ de relations entre mathématiques et musique, le processus numérique dérivant lui-même d'applications mathématiques. Il consiste en effet à remplacer l'onde, définie par la mesure $p(t)$ de la pression de l'air ambiant en fonction du temps t, par une suite $p_n(t)$ « d'échantillonnages », un peu comme on trace une courbe à partir d'un certain nombre de points seulement. Si le « spectre de Fourier », obtenu à l'aide de la transformée de Fourier, qui permet la recherche des composantes périodiques d'un signal, est borné, il n'y a pas de perte d'information si la période T d'échantillonnage est suffisamment petite. Or l'oreille humaine ne perçoit que les sons d'une fréquence inférieure à 20 000 Hz, ce qui correspond aux premiers coefficients de Fourier. La physique nous dit aussi qu'il faut une fréquence au moins du double pour obtenir une qualité suffisante. On prendra donc un échantillonnage supérieur à 40 000 Hz (44 100 pour les CD) et on restituera ainsi tout le spectre audible d'un son.

La synthèse sonore est le processus inverse : à partir d'une suite numérique de coefficients de Fourier, on réalise des sons, y compris ceux qu'on ne rencontre pas dans la nature et qui peuvent donner naissance à des illusions sonores, reposant essentiellement sur le fait que l'oreille humaine confonde plus facilement les sons éloignés d'une octave que d'une demi-octave. Il y a plus d'un siècle déjà, Drobish décrivait d'ailleurs la proximité des sons en les représentant par des points tracés sur une hélice : deux sons à l'octave sont les points correspondants de deux spires consécutives de l'hélice.

Concernant les illusions auditives, deux noms viennent à l'esprit : ceux de Jean-Claude Risset et de Roger Shepard. Le premier a publié en 1969 un catalogue de sons synthétisés sur ordinateur : imitations de sons instrumentaux mais aussi sons paradoxaux. Le second a synthétisé en 1964 une suite de douze sons formant une gamme chromatique qu'il reproduit de manière répétitive, donnant ainsi l'impression d'une montée sans fin, un peu comme les escaliers impossibles d'Escher où l'on reste au même niveau même en montant sans cesse.

Parions que les emprunts réciproques entre musique et mathématiques ne s'arrêteront pas là et que les deux disciplines n'ont pas fini de s'enrichir l'une l'autre.

E.B., G.G. & D.S.

par Benoît Rittaud

Mathématiques et musique : une origine commune

Il y a deux mille cinq cents ans, la congrégation fondée par Pythagore pose les bases de la théorie des proportions, qui deviendra un pilier des mathématiques. Objectif des pythagoriciens : percer les secrets de l'harmonie.

Pythagore et la musique, manuscrit latin, Bibliothèque nationale, Paris.

« Qu'y a-t-il de plus sage ? — Le Nombre. Qu'y a-t-il de plus beau ? — L'Harmonie. »

Ces deux articles du catéchisme pythagoricien synthétisent les deux grandes orientations de l'école pythagoricienne, secte mystique fondée par le célèbre Pythagore au VI^e^ siècle avant notre ère : mathématiques et musique. Aujourd'hui, pour celui qui les observe d'un regard extérieur un peu lointain, les deux disciplines semblent n'avoir rien en commun. Pourtant, les deux sont nées ensemble, sœurs autrefois jumelles d'un même élan pour comprendre l'univers. Cet élan fut la principale contribution des Pythagoriciens à l'émergence de la science en général et des mathématiques en particulier. Concrètement, la musique a donné l'occasion aux Pythagoriciens d'élaborer la notion mathématiquement fondamentale de proportion, qui elle-même a enrichi la musique de la théorie des rapports harmoniques qui lui manquait et qui n'a cessé par la suite de se développer.

Pour les fondateurs que sont les Pythagoriciens, la sagesse des mathématiques et la beauté de la musique vont de pair : les deux disciplines allaient en tirer un immense profit.

L'apport principal de Pythagore et de ses disciples aux mathématiques est de les avoir étudiées comme discipline particulière disposant de méthodes propres. Avant Pythagore, les mathématiques n'avaient pas véritablement de statut distinct : les langues babyloniennes (assyrien, sumérien) ne disposaient même pas de mot pour désigner la discipline, alors même qu'ils la pratiquaient pourtant déjà à un niveau élevé. À partir de Pythagore, donc, les mathématiques conquièrent un début d'autonomie, et la musique leur donne un champ d'investigation privilégié.

Le maître et les disciples

Leur tradition orale, leur culte du secret et leur tendance à attribuer sys-

tématiquement au maître les découvertes des disciples font qu'il est souvent difficile de mettre un nom d'auteur sur telle ou telle découverte des Pythagoriciens. Pour ce qui est de la musique, outre Pythagore lui-même, on peut retenir trois noms : Hippase de Métaponte, qui mesura les trois accords fondamentaux (octave, quinte, quarte), Philolaos de Crotone, qui découvrit la médiété harmonique, outil nécessaire à la théorie, et enfin Archytas de Tarente, qui établit les genres enharmonique, chromatique et diatonique.

L'étincelle qui provoqua le mariage pythagoricien de la musique et des mathématiques est une anecdote rapportée par différents auteurs, mettant en scène Pythagore (ou Hippase) observant des accords musicaux en passant devant l'atelier d'un forgeron. Plusieurs expériences distinctes sont suggérées par ces auteurs : l'une utilise des vases identiques plus ou moins remplis d'eau, une seconde des disques métalliques de même diamètre mais d'épaisseurs différentes, et une troisième des cordes vibrantes de différentes longueurs.

Le son et les nombres

Dans l'une de ces expériences, on prend un disque d'une certaine épaisseur e, un autre disque d'épaisseur $2e$, et on les fait tinter simultanément ; les Pythagoriciens remarquent qu'on obtient un accord d'octave : cette expérience simple, facile à reproduire, est riche de conséquences.

Tout d'abord, le recours à l'expérience pour déduire un fait général est une idée très moderne d'un point de vue scientifique. Déjà présent chez les Pythagoriciens, donc, ce mode d'accès à la connaissance scientifique restera marginal jusqu'au XVII^{e} siècle : le retrouver cinq siècles avant notre ère mérite donc une attention particulière.

Ensuite, l'expérience est autant mathématique que physique : que l'on utilise des vases dont l'un est entièrement plein et l'autre à moitié, des disques dont l'épaisseur de l'un est double de celle de l'autre, ou encore des cordes dont l'une est deux fois plus longue que l'autre, l'accord demeure le même dans les trois cas. Ce qui constitue la base de l'harmonie n'est donc pas le matériau, l'objet physique qui produit le son, mais bien le nombre (arithmos). Ainsi, « le nombre de l'octave est 2. »

Pour les pythagoriciens, la sagesse des mathématiques et la beauté de la musique vont de pair.

Bibliographie

J.-F. Mattei, *Pythagore et les pythagoriciens*, Presses Universitaires de France, 1993.

L. Robin, *La pensée grecque et les origines de l'esprit scientifique*, La Renaissance du livre, 1932.

Comprendre la musique, c'est connaître les nombres

Plus précisément, ce à quoi est liée l'harmonie musicale dans le type d'expériences précédent est la théorie des proportions : peu importent les épaisseurs des disques, la contenance des vases ou les longueurs des cordes, l'accord musical est préservé à chaque fois que les rapports le sont : 2/1 pour l'octave, 3/2 pour la quinte, 4/3 pour la quarte. (La hauteur du son varie suivant les longueurs des cordes, mais l'accord, lui, demeure toujours le même quand le rapport de ces longueurs est fixé.).

Comprendre la musique, c'est donc comprendre les rapports. Et comprendre les rapports, c'est connaître les nombres, sans lesquels, comme l'indique Philolaos, « rien ne peut être conçu ni connu ». Un scientisme avant la date, que ne renieraient pas les positivistes contemporains : tout au plus ces derniers remplaceraient-ils les nombres par les équations…

B. R.

L'harmonie géométrique

Quel est le rapport entre une lyre et un cube ? Aucun, semble-t-il, sauf lorsqu'on connaît les longueurs relatives des cordes : Philolaos a ainsi remarqué qu'à ces longueurs relatives (6, 8, 9 et 12, pour un total de quatre cordes) correspondaient le nombre de faces, de sommets et d'arêtes d'un cube (6, 8 et 12).

C'est ainsi que le Pythagoricien appelait le cube *l'harmonie géométrique*.

Une simple coïncidence, bien sûr, dans laquelle on n'arrive d'ailleurs pas à insérer la valeur 9 comme il le faudrait pourtant, mais qui mettait en valeur les relations numériques elles-mêmes par-delà leur objet.

C'est ainsi que, bien que sans valeur mathématique réelle, la correspondance ainsi faite constitue un pas vers l'abstraction pure, vers l'étude du nombre pour lui-même.

Et le théorème ?

Pythagore porte l'un des rares noms associés aux mathématiques que tout le monde connaît, essentiellement grâce au théorème éponyme que tous les écoliers d'hier et d'aujourd'hui étudient. Or on est aujourd'hui à peu près certain que Pythagore n'est pour rien dans ce fameux théorème : il n'est même pas sûr que lui et son école s'y soient intéressés autrement que pour quelques cas particuliers. Ce qui est clair, c'est que la découverte de la relation liant les longueurs des côtés d'un triangle rectangle était déjà connue bien avant lui : une tablette babylonienne bien plus ancienne que Pythagore (tablette qui porte le nom de Plimpton 322) donne la liste d'un nombre suffisant de mesures de côtés de triangles rectangles pour que ce point soit hors de doute. D'autre part, il est très peu probable que Pythagore soit l'auteur d'une démonstration rigoureuse, même si l'on ignore à qui revient la paternité de la preuve du plus célèbre des théorèmes (la première démonstration attestée est celle d'Euclide, deux siècles après Pythagore).

Cher non-initié... (1)

Cher non-initié, vous n'avez pas été familiarisé au langage d'Euterpe et d'Apollon, vous vous posez depuis toujours toutes sortes de questions que vous n'osez formuler de peur de passer pour un illettré. *Tangente* vous a compris. Cette page ne vous permettra pas de briller en société mais elle vous évitera peut-être l'humiliation totale.

Signes du temps

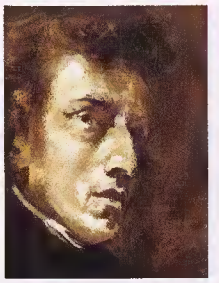
Ronde, noire, blanche... qu'est-ce que ces formes et ces couleurs ont à voir avec la musique ? Pas de panique, cher non-initié. Le minimum à savoir tient en quelques chiffres.

Symbole	Valeur
Ronde	4 temps
Blanche	2 temps
Noire	1 temps
Croche	1/2 temps
Double croche	1/4 temps
Triple croche	1/8 temps
Noire pointée*	1 temps et demi

* Le point rajoute la moitié de la valeur de la note. Une noire pointée vaut donc un temps et demi, une croche pointée, 3/4 de temps, une blanche pointée, trois temps...

Tuer le septième harmonique

Pourquoi, lorsque l'on joue au piano, les marteaux s'abattent-ils à un septième de la longueur des cordes ? Cher non-initié, vous avez l'oeil ! Effectivement, le positionnement du marteau à un septième de la longueur de la corde n'est pas anodin et a pour but de faire disparaître le septième harmonique, pénible pour nos petites oreilles occidentales.

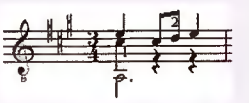


Signature musicale

Mais que signifient ces 3/4, ces 6/8, bref, ces drôles de fractions qui viennent vous narguer dès le début de la portée ? Rassurez-vous, cher non-initié, c'est très simple à comprendre. Souvenez-vous : dans l'écriture que nous utilisons, la ronde est la note la plus longue. Nous allons lui associer le chiffre 1. Et comme dans une ronde, il y a deux blanches, alors la blanche se verra associer le chiffre 2. Et ainsi de suite : le chiffre 4 pour la noire, le 8 pour la croche. Dans la fameuse fraction visible au début de la portée, le dénominateur p est le chiffre représentant l'unité de référence. Si c'est un 4, c'est que l'on « compte en noires ». Si c'est un 8, alors on « compte en croches ». Le numérateur n est le nombre d'unités par mesure.

$$\frac{n}{p} = \frac{\text{nombre d'unité de référence par mesure}}{\text{chiffre de référence}}$$

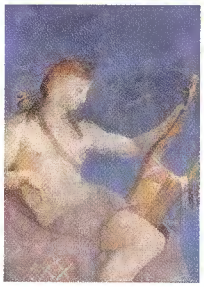
Sur cette partition de valse, le 3/4 en début de portée signifie donc que l'unité de référence est la noire (4 au dénominateur) et qu'il y a 3 noires, donc 3 temps par mesure, ce qui, après tout, est normal pour une valse !



par Bernard Parzysz

l'harmonie des pythagoriciens

C'est toute une théorie que les pythagoriciens construisent pour fixer leur échelle musicale. En n'utilisant que la quinte et l'octave, ils élaborent un outil de référence qui fera autorité en Occident jusqu'à la Renaissance.



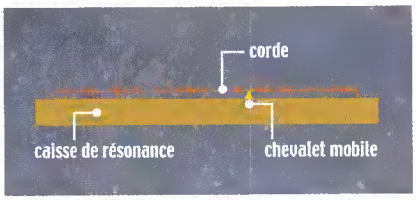
La société des Pythagoriciens, fondée au VI^{e} siècle avant notre ère, a survécu à son fondateur pendant plus d'un siècle ; Aristoxène, né à Tarente vers 350 avant J.-C., en faisait partie, et c'est par lui que nous sont connus les travaux de la congrégation sur la musique, grâce notamment à deux de ses ouvrages : les *Éléments harmoniques* et *Sur le rythme* (dont ne nous sont parvenus que des fragments).

Organiser les sons

L'idée de base est de s'intéresser uniquement à la hauteur des sons (nous dirions aujourd'hui : à leur fréquence), d'en considérer un nombre limité que l'on ordonne du plus grave au plus aigu, et de n'utiliser que ces sons pour faire de la musique. On parle alors d'échelle musicale. Pour la définir, les Pythagoriciens utilisent le monocorde, instrument rudimentaire constitué d'une caisse de résonance sur laquelle est fixée une corde tendue entre deux chevilles fixes. Un chevalet permet de faire varier la longueur de corde qu'on fait vibrer.

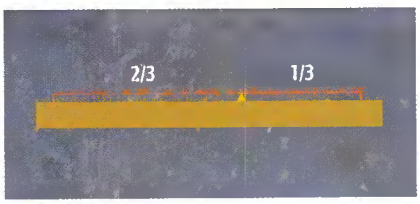
L'échelle de Pythagore n'utilise que les nombres 1, 2 et 3.

Pythagore (580-480 av. J.-C.), philosophe, mathématicien et astronome grec n'a laissé aucun écrit. Son enseignement n'est connu que par ses élèves et disciples.
Les Pythagoriciens croient à la toute puissance du nombre qui régit l'univers. (Par nombre, il faut entendre entier naturel.) L'irrationalité de la racine carrée de 2, conséquence du théorème de Pythagore, entraîna la première "crise intellectuelle" de l'histoire de la pensée.



L'un des moyens couramment utilisés en musique pour produire des sons est de faire vibrer une corde tendue (guitare, violon, etc.). À tension égale, plus la longueur de la corde est petite, plus le son obtenu est aigu. Les Pythagoriciens ont ainsi pu constater que, lorsque le chevalet est placé au milieu de la corde, les deux moitiés donnent le même son (évidemment !) : elles sont à l'unisson. De plus, chacune donne un son qui « ressemble » beaucoup au son obtenu avec la corde entière (mais en plus aigu) : on appelle octave l'écart (intervalle) avec le son initial, l'octave correspondant donc au rapport 1/2.

En plaçant le chevalet aux deux tiers de la corde, on obtient logiquement deux sons à l'octave l'un de l'autre, puisque l'un des deux côtés est deux fois plus long que l'autre.



Il se trouve que le son produit par le plus grand des morceaux de la corde "sonne bien" avec le son fondamental, celui que donne la corde prise toute entière. L'intervalle obtenu entre ces deux sons constitue la quinte, qui correspond donc au rapport de longueurs 2/3.

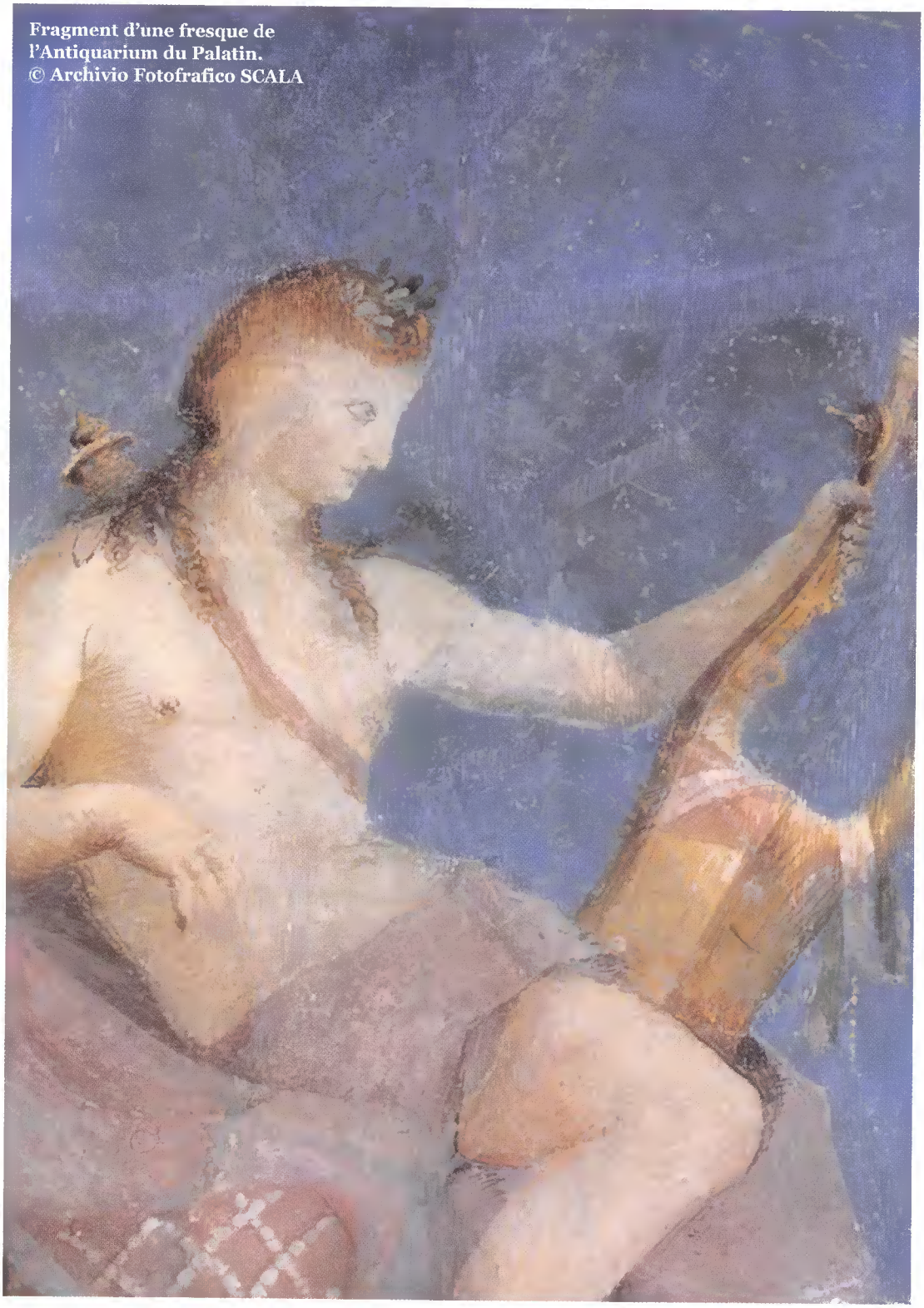
Ces simples remarques ont suffi aux Pythagoriciens pour créer leur échelle musicale. Celle-ci ne fait intervenir que les nombres 1, 2, 3, et l'on voit mal comment faire plus simple. Que se passerait-il en effet si l'on ne voulait considérer que les nombres 1 et 2 ? Les seuls sons que l'on obtiendrait correspondraient alors aux longueurs de la forme $(1/2)^n$ (n entier), c'est-à-dire à une monotone suite d'octaves. Ces sons sont d'ailleurs si ressemblants qu'on a du mal à les distinguer : pensons aux chorales mixtes qui chantent « à une seule voix » et où les femmes chantent en fait une octave au-dessus des hommes.

La chambre de la *Segnatura* au Vatican avec l'*École d'Athènes* de Raphaël. Cette peinture représente les principaux philosophes grecs de l'Antiquité. (Platon et Aristote au centre, Pythagore à droite de la porte.)

1, 2, 3, et c'est tout !

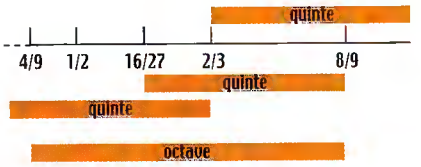
Tous les sons qui diffèrent d'un nombre entier d'octaves constituent une note. Ainsi, avec les nombres 1 et 2, on n'obtient qu'une seule note (c'est vraiment une échelle minimaliste !). En introduisant le nombre 3 (c'est-à-dire la quinte), on obtient un son situé entre le son de base et son octave supérieure, donc une nouvelle note.

Construire une échelle musicale revient à subdiviser l'octave à l'aide d'un petit nombre de sons intermédiaires. L'idée des pythagoriciens a été de réitérer la division initiale, en considérant la quinte de la quinte, puis la



Fragment d'une fresque de l'Antiquarium du Palatin.
© Archivio Fotofrafico SCALA

quinte de la quinte de la quinte, etc. Lorsqu'on parvient à un son qui fait sortir de l'octave de départ, on s'y ramène à l'aide d'une multiplication par deux de la longueur du bout de corde ayant produit ce son. De la sorte, les pythagoriciens obtiennent tous les sons correspondant aux longueurs $2^n/3^p$ comprises entre 1 et 1/2 (où n et p sont des entiers).



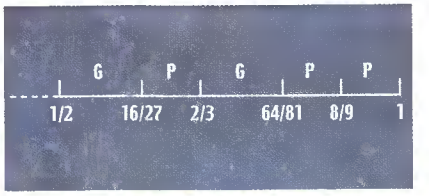
Dans l'idéal, les subdivisions ainsi obtenues diviseraient l'octave en un certain nombre d'intervalles qui fixeraient les sons intermédiaires de l'octave. Malheureusement, puisque 2^n est pair et 3^p impair, on n'a jamais $2^n/3^p = 1$, ni $2^n/3^p = 1/2$ (sauf si $n = p = 0$ ou $n = 1$ et $p = 0$, évidemment), ce qui fait que le découpage, tel quel, produit une infinité de sons distincts à l'intérieur d'une octave. Bien sûr, cela n'est vrai que d'un point de vue théorique puisque, dans la pratique, notre oreille ne distingue guère deux sons correspondant à des longueurs de corde voisines.

En pratique, donc, on considère qu'on a « bouclé la boucle » lorsqu'on est revenu « au voisinage » de la note de départ, c'est-à-dire lorsque $2^n/3^p$ est voisin de 1. On obtient alors une échelle à p notes, cela grâce à p quintes successives ramenées dans l'octave.

Historiquement, les valeurs de p retenues ont été les suivantes :

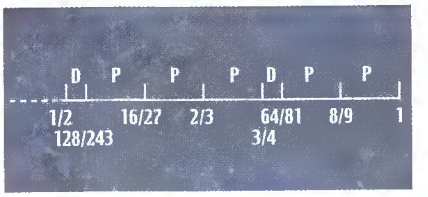
p	n	$2^n/3^p$	Échelle
5	8	1,053498	pentatonique
7	11	0,936443	heptatonique
12	19	0,9986540	chromatique
53	84	0,997914	
665	1054	1,000044	

Dans tous les cas, l'octave est ainsi subdivisée en intervalles successifs qui ne sont que de deux types. Par exemple, pour l'échelle pentatonique, le découpage obtenu est le suivant :



Les petits intervalles, désignés par la lettre P, correspondent à des rapports de longueurs égaux à 8/9 (≈ 0,889). Pour les plus grands, notés G, cette valeur tombe à 27/32 (≈ 0,844).

La gamme majeure pythagoricienne correspond à la subdivision suivante de l'octave, où les fractions indiquent la longueur de corde par rapport à la longueur à vide.



L'échelle pentatonique se retrouve à travers le monde entier, du Pérou à la Chine en passant par l'Écosse : c'est, à peu de chose près, la « gamme chinoise » des touches noires du piano. L'échelle heptatonique a abouti en Occident, via divers avatars (voir pages suivantes), à notre gamme « majeure » usuelle à 7 notes (les touches blanches du piano). De même, l'échelle à 12 notes a donné notre gamme « chromatique » (toutes les touches du piano, blanches et noires). L'échelle à 53 notes nous a, elle, donné la « gamme des solfèges » des spécialistes.

B. P.

par Benoît Rittaud

La moyenne harmonique

ou comment accorder les fréquences

Quel est le rapport entre une file d'attente, un circuit électrique et les accords musicaux ? Réponse : derrière les trois se cache la moyenne harmonique, qui tient son nom de ses origines pythagoriciennes.

Dans une administration, deux guichets sont ouverts : l'un est géré par un guichetier très efficace : il traite chaque client en 5 minutes. L'autre est occupé par un novice, qui a besoin de 10 minutes pour s'occuper d'un client.

Le chef, qui souhaite faire tourner ses effectifs, décide d'affecter deux nouvelles personnes aux guichets, avec deux objectifs : d'une part, faire en sorte que le rythme global de passage des clients demeure inchangé, d'autre part, mettre des guichetiers aussi efficaces l'un que l'autre, pour équilibrer la taille des files d'attente. Si l'on mesure l'efficacité d'un guichetier au temps qu'il met pour faire passer un client, quelle doit être celle des deux nouveaux guichetiers ?

Certains lecteurs auront déjà reconnu le problème des résistances équiva-

lentes dans un circuit électrique, et commencent peut-être à se demander quel rapport il peut bien avoir avec la musique. La réponse tient en une notion au nom particulièrement poétique : la moyenne harmonique. Un calcul très simple montre qu'en une heure, le guichetier le plus efficace fait passer 12 clients et le novice seulement 6. En tout, les guichetiers assurent donc un débit de 18 clients à l'heure. Pour répondre aux exigences du chef, les nouveaux devront donc traiter 9 clients chacun en une heure, c'est-à-dire que chaque client passera 6 minutes et 40 secondes au guichet.

Guichets harmoniques

Plus généralement, si l'on mesure en temps passé avec chaque client l'efficacité d'un guichetier et que l'on notre a et b celle des deux premiers et e celle des deux nouveaux guichetiers, alors le calcul précédent se synthétise par la formule suivante :

$$\frac{2}{e} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

La valeur e ainsi déterminée est la moyenne (ou médiété) harmonique de a et b, une notion inventée par les Pythagoriciens, qu'ils appelèrent tout d'abord subcontraire avant de découvrir le lien profond que cette opération mathématique entretenait avec la musique.

Imaginons que nous souhaitions réaliser une flûte, instrument qui n'autorise qu'un certain nombre de sons différents. Pour que ces sons soient accordés entre eux, il convient de choisir convenablement la distance de chaque trou au bout de la flûte par lequel l'instrumentiste va souffler. Fixons à l la plus petite de ces distances, qui détermine ainsi un son fondamental.

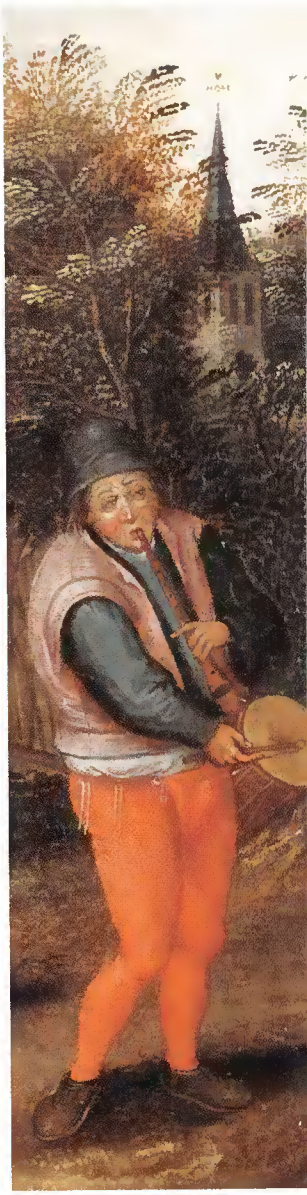
Physiquement, souffler dans la flûte et laisser l'air s'échapper par un trou a pour effet de faire vibrer le matériau constituant l'instrument ; chaque élément de longueur de la flûte va osciller autour de sa position moyenne. Le nombre de fois que les *bosses* montent et descendent en une seconde définissent la fréquence : c'est elle qui détermine la hauteur du son perçu.

Des fréquences, pas des longueurs

Une manière simple de placer un second trou est alors de choisir la longueur $2l$, pour faire un son une octave plus bas. Le fait que ce rapport 2 entre les longueurs produise un son harmonieux tient à ce que les fréquences des ondes produites par chacun des sons sont dans un rapport simple de 1 à 2.

La *moyenne* des sons produits par les trous de la flûte à distance l et $2l$ du bout est donc la moyenne des fréquences, mais le nouveau trou qu'il convient de faire à la flûte pour obtenir ce son *moyen* n'est pas situé au milieu des deux autres, la fréquence du son n'étant pas directement donnée par la longueur, mais par son inverse : la relation liant la fréquence f du son à la distance d d'un trou est du type $f = 1/d$ (en fait, $f = k/d$, où k est une constante). Le calcul de d se mène donc comme celui effectué avec nos guichetiers, où les longueurs remplacent le temps passé par client, et la fréquence le nombre de clients à l'heure.

C'est ainsi que, pour obtenir un son moyen entre deux sons d'une octave, la moyenne arithmétique des fréquences, donnée par la formule $(a + b)/2$, se traduit en termes de longueur par la formule $(1/l) + (1/2l) = 2/d$, c'est-à-dire que la bonne distance s'obtient par la moyenne harmonique des longueurs



***Le cortège du fiancé* (détail) de Pierre Brueghel le Jeune. © Collection Princesse Charles d'Arenberg.**

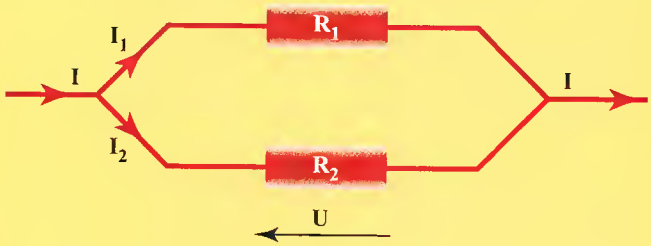
extrêmes. En l'occurrence, cela donne $d = (4/3)l$ (c'est la quarte).

Historiquement, la médiété harmonique fut le troisième exemple de moyenne, après l'arithmétique $(a + b)/2$ et la géométrique $\sqrt{ab}$. Les Pythagoriciens, fascinés par le nombre, ne se sont pas arrêtés là : en tout, ils ont élaboré pas moins d'une dizaine de médiétés pour répondre à différents problèmes sur les proportions.

B. R.

Une résistance au lieu de deux

Dans un circuit électrique, l'intensité I représente un débit, c'est-à-dire une *quantité d'électricité* par unité de surface (la section traversée du fil électrique, par exemple) et par unité de temps. Elle est comparable au nombre de clients qui arrivent à l'heure, pour reprendre l'exemple des guichets. La tension U est une différence de potentiel, sorte de *degré d'impatience* des clients qui attendent leur tour. Dans un circuit électrique comme dans la vie, lorsque deux fils (ou deux guichets) séparent les électrons (ou les clients), le flot se répartit de manière à ce que l'attente soit minimisée, ce qui se traduit par la loi des mailles : la tension dans le fil 1 est égal à celle dans le fil 2.
Par définition, on appelle résistance le rapport entre intensité et tension, c'est-à-dire le nombre R qui figure dans la loi d'Ohm : $U = RI$.
Dans la figure précédente, l'intensité I est scindée en deux, I_1 et I_2, avec $I = I_1 + I_2$.



On a ainsi $U = R_1I_1$ et $U = R_2I_2$. S'il s'agit de remplacer ces deux résistances R_1 et R_2 par une seule, R, équivalente en ce sens qu'elle laisse la même tension entre les extrémités, R doit vérifier la relation $U = RI$, d'où :

$$U = RI = R(I_1 + I_2) = R\left(\frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2}\right),$$

d'où l'on tire la relation

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

Si l'on veut plutôt, comme dans le problème de l'article, remplacer R_1 et R_2 par deux résistances R identiques montées en parallèle, un calcul analogue montre que R est donnée par la moyenne harmonique

$$\frac{2}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

On appelle *conductance* l'inverse de la résistance. La moyenne harmonique des résistances se traduit en termes de conductances par une moyenne arithmétique toute simple : $C = \frac{C_1 + C_2}{2}$.

Cher non-initié... (2)

Cher non-initié, Jamie Foxx a reçu l'oscar du meilleur acteur en 2005 pour sa prestation dans le film Ray et, depuis, vous vous intéressez au jazz. C'est bien, vous êtes curieux.

Rigueur et liberté

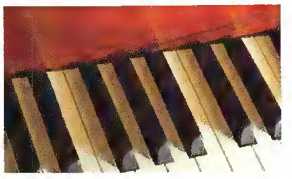
Le jazz est né aux États-Unis au tout début du xx^{e} siècle. On l'identifie surtout à son swing, à l'utilisation de la « note bleue » (la septième diminuée) et à la place qu'il réserve à l'improvisation. Celle-ci, loin d'une illusoire liberté absolue, exige le respect d'un canevas harmonique parfois très complexe. Un morceau de jazz se construit souvent selon une structure précise (pour s'en persuader, on écoutera attentivement John Coltrane et son big band interpréter *Olé*, *My favorite things* et *Greensleaves*) : introduction en 4 ou 8 mesures, exposition du thème, séquences d'improvisation (sur un nombre de mesures que chaque musicien respectera scrupuleusement), retour (tout en finesse) au thème. Une rigueur que l'on qualifierait volontiers de... mathématique !

Pourquoi le slap ?

Lorsqu'une corde est pincée (guitare, clavecin), elle émet un son fait d'une superposition de vibrations sinusoïdales : une fondamentale et des harmoniques ayant pour fréquence un multiple n de la fréquence fondamentale et dont l'amplitude décroît en $1/n^2$. Lorsque la corde est frappée (piano), ces amplitudes décroissent en $1/n$. On perçoit donc plus d'harmoniques dans le cas « frappé ». Le *slap* est une technique utilisée par les bassistes ou les contrebassistes de jazz et qui consiste justement à frapper les cordes au lieu de les pincer. Le musicien obtient ainsi un son particulièrement riche et percutant.

Rythme binaire, rythme ternaire

Rythme binaire, rythme ternaire... pour quoi faire ? Nous dirons en termes simples que le binaire consiste à diviser le temps en deux (imaginez une marche militaire : une deux, une deux...) alors que le ternaire consiste à le diviser en trois (une belle valse viennoise). Évidemment, dans une pièce musicale au rythme binaire, le ternaire peut faire irruption à tout moment (par l'apparition de triolets alors que l'on n'avait que des paires de croches, par exemple). Et vice-versa. L'utilisation d'une rythmique ternaire fait partie des caractéristiques du jazz. C'est ce qui induit le fameux balancement, swing en anglais, propre à cette musique. Pourtant (pour simplifier les choses ou embrouiller encore plus les non-initiés ?), on conserve une écriture binaire de la musique, bien que l'on pense en ternaire. Ainsi, en jazz, lorsque vous lisez ceci : ♫ il faut penser ceci ♫♫, la note du milieu demeurant silencieuse. La bonne nouvelle c'est que plus le rythme s'accélère, moins la différence entre binaire et ternaire est perceptible. Enfin, cher non-initié, vous désirez sans doute savoir comment fait un pianiste qui joue en binaire avec sa main gauche et en ternaire avec la droite (des croches sur la portée du bas, des triolets sur celle du haut, ça arrive). Comment faisaient Bill Evans, Nina Simone ou Ray Charles ? L'auteur de cette brève n'a pas la réponse. Mais on peut s'en sortir en prenant le dénominateur commun de ces deux rythmes. 1/3 pour le ternaire, 1/2 pour le binaire : on divise donc mentalement le temps en 6. Les deux mains tombent ensemble sur le 1er battement, au 2^{e} battement personne ne bouge, puis la main droite marque le 3^{e} battement, ensuite la main gauche le 4^{e} battement, la main droite encore au 5^{e} et repos au 6^{e}. Ouf !

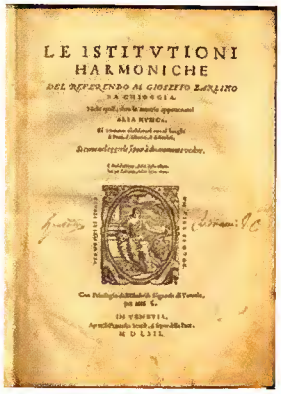


par Bernard Parzysz

L'impossible quête de l'échelle parfaite

L'échelle de Pythagore ne faisait intervenir que des quintes : cela ne pouvait suffire à représenter tous les accords musicaux. La tierce majeure prit sa revanche à la Renaissance, avant que ne s'impose la quête encore inachevée d'une échelle « parfaite ».

Gioseffo Zarlino et le frontispice de son livre *Le Istitutioni harmoniche.*



L'ÉCHELLE PYTHAGORICIENNE (cf. pp. 6, 7, 8) est fondée sur un seul et unique intervalle, la quinte, à partir duquel sont construites toutes les notes. Cependant, les recherches des Pythagoriciens et de leurs successeurs ont vite montré que d'autres manières de procéder étaient possibles.

Si l'on place un chevalet au cinquième d'une corde vibrante, la partie la plus courte de la corde sonne deux octaves au-dessus de la partie la plus longue. Ce point n'est pas une surprise, puisque le rapport des deux longueurs est de 1/4, soit $(1/2)^2$, 1/2 correspondant à une octave. Plus intéressant encore le son produit par ce petit morceau de corde se situe entre le son fondamental et sa quinte supérieure (ce qui correspond au fait que $1 > 4/5 > 1/2$).

Le nouvel intervalle ainsi obtenu est la tierce majeure. Lorsqu'on joue simultanément un son (fondamental), sa tierce et sa quinte, on obtient l'accord parfait majeur, ainsi nommé parce que considéré comme particulièrement mélodieux.

Voilà donc un problème de taille posé à l'échelle pythagoricienne : elle ne contient pas de tierce (4/5 ne pouvant pas s'écrire sous la forme $2^n/3^p$ comme c'est le cas de toutes les notes de cette gamme), il est donc impossible de produire l'accord parfait majeur à partir de celle-ci. Toutefois, de même qu'il fut possible aux Pythagoriciens d'approcher correctement la valeur 1 par $2^8/3^5$, par $2^{11}/3^7$, ou encore par $2^{19}/3^{12}$ (cf. pp. 6, 7, 8), il est possible de donner une bonne approximation de la valeur 4/5 (= 0,8) : il suffit pour cela de prendre 26/34, qui est voisin de 0,79. D'où l'idée, qui germa chez divers musiciens et que diffusa dès 1558 le musicien et théoricien vénitien Gioseffo Zarlino, de substituer à l'ancienne

Basse, cahier de musique et épée de Michel Boyer
D. R.

échelle de Pythagore, fondée sur la quinte, une échelle voisine mais fondée cette fois sur l'accord parfait.

L'accord parfait

Le procédé de construction de cette nouvelle échelle commence ainsi : on fixe tout d'abord trois notes à partir de l'accord parfait, ce qui donne les longueurs 1, 4/5 et 2/3. On prend ensuite les sons correspondant à un accord majeur parfait basé sur le son supérieur du fondamental précédemment choisi, ce qui donne les longueurs 2/3,(2/3) × (4/5) = 8/15 et (2/3) × (2/3) = 4/9. Ce dernier son sort de l'octave (qui s'arrête à 1/2), on le descend donc d'une octave en multipliant la longueur par 2, d'où la longueur 8/9.

De la sorte, on obtient 5 sons dans l'octave. Il en manque donc 2, et une idée logique serait de recommencer les opérations précédentes en partant des sons déjà construits pour en trouver de nouveaux. Malheureusement, ce procédé ne fonctionne pas : il ne produit pas de son vraiment nouveau. Il fallut donc une idée supplémentaire, géniale de simplicité : faire un accord parfait *descendant* basé sur le son fondamental, ce qui produit les

Un problème de l'échelle pythagoricienne est qu'elle ne contient pas de tierce.

longueurs 1, 5/4, et 3/2. Bien entendu, les deux nouveaux sons 5/4 et 3/2 sont hors de l'octave (ils sont trop bas), il convient donc de les remonter en divisant les longueurs par 2, ce qui donne 5/8 et 3/4. L'échelle finalement obtenue est dite *zarlinienne* :

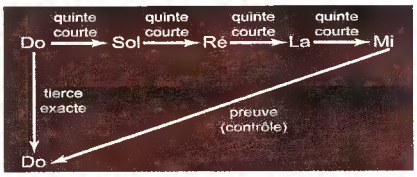
Les fractions sont nettement plus simples que celles intervenant dans l'échelle de Pythagore. En revanche, cette échelle ne présente plus 2 mais 3 types d'intervalles successifs, qui correspondent aux rapports de longueurs 8/9 (*ton majeur*), 9/10 (*ton mineur*) et 15/16 (*demi-ton*). Mais les différences entre les échelles restent modérées : 4 notes sur les 7 sont les mêmes dans les deux échelles ; les 3 autres sont un peu plus basses dans l'échelle zarlinienne et, dans ces cas, le rapport des longueurs correspondant à deux notes de même nom est égal à 81/80. Comme approximation de l'échelle de Pythagore, ce n'est donc pas si mal !

Le problème de la transposition

Un nouveau problème s'est alors posé avec le développement des instruments à sons fixes, dans lesquels le musicien ne peut jouer que les sons de l'échelle dans laquelle l'instrument est accordé (le clavecin par exemple, contrairement au violon). Lorsqu'on *transpose*, c'est-à-dire lorsqu'on joue un air donné plus haut ou plus bas qu'initialement prévu (par exemple pour l'adapter à une voix humaine), on ne retrouve plus exactement les mêmes intervalles (c'est déjà vrai avec des intervalles de deux types), à moins de transposer d'une octave

entière. Les écarts sont parfois assez grands, ce qui fait sonner faux l'instrument. Pour pallier ce défaut, les musiciens ont imaginé diverses échelles, appelées *tempéraments*, et nous nous bornerons ici à en donner un exemple, apparu à la fin du XVI^{e} siècle et très utilisé aux XVII^{e} et XVIII^{e} siècles, connu sous le nom de *tempérament mésotonique*.

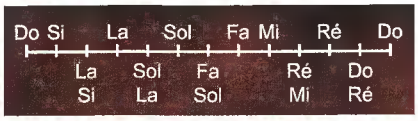
L'idée est de donner la priorité à la tierce sur la quinte, et donc d'avoir un maximum de tierces exactes. On procède, ainsi que le faisait Pythagore, par quintes successives, mais, comme 4 quintes successives font un intervalle un peu plus grand qu'une tierce plus une octave (le rapport des longueurs est $(4/5)^4 \approx 0{,}410$ dans le premier cas, de $2/5 = 0{,}4$ dans le second), il faut un peu "raccourcir" les quintes. Le schéma du début de l'accordage de l'instrument est le suivant :



La fin de l'accordage s'effectue grâce à des tierces (exactes). Il y a cependant un inconvénient : les deux dernières notes obtenues forment une quinte beaucoup trop grande, qui "hurle" ; on l'a appelée la *quinte du loup*.

Vers le tempérament égal

De nombreux musiciens ont essayé de résoudre les difficultés que présentait le problème du tempérament. Parmi ceux-ci, on trouve des scientifiques comme Simon Stevin (1548-1620), Johann Kepler (1571-1630) et Leonhard Euler (1707-1783). On attribue généralement l'invention du tempérament égal à Andreas Werckmeister (1645-1706), organiste et théoricien allemand. En réalité, tel Zarlino, il ne fit que diffuser cette invention. Dans ses ouvrages théoriques, il propose divers tempéraments inégaux avant de se ranger finalement aux côtés de ceux qui prônaient une subdivision de l'octave en 12 intervalles égaux. Le rapport de longueurs correspondant à cet intervalle (le *demi-ton tempéré*) est nécessairement égal à $\sqrt[12]{1/2}$, soit environ 0,944.



Le tempérament égal a ceci de particulier qu'aucune de ses notes ne correspond exactement à une note d'un autre tempérament (à part, bien sûr la note fondamentale). Mais, même faux du point de vue harmonique, il possède un intérêt indéniable : sa simplicité. En particulier, la transposition ne pose plus aucun problème.

Enfin, dans le même ordre d'idées que le tempérament mésotonique, l'accordeur Serge Cordier a imaginé et expérimenté il y a quelques années le TEQJ (tempérament égal à quintes justes), dans lequel — en se fondant sur certaines propriétés d'inharmonicité des cordes du piano dues à la grande tension à laquelle elles sont soumises — il donne la priorité à la quinte sur l'octave. Comme 12 quintes (rapport $(2/3)^{12} \approx 0{,}0077$) font un peu plus que 7 octaves (rapport $(1/2)^7 \approx 0{,}0078$), il est nécessaire, pour pouvoir "boucler la boucle", d'agrandir très légèrement l'octave. À l'écoute, le résultat est assez séduisant, mais l'on peut parier que bien d'autres innovations feront encore évoluer la gamme.

B. P.

par Norbert verdier

La musique des mathématiques orientales

Quand on pense musique et mathématiques, on songe à Pierre Boulez, à Pierre Schaeffer, à Yannis Xenakis,... bref, aux compositeurs contemporains. Au Moyen Âge pourtant, Al Kindi et Al Farabi, les deux plus éminents théoriciens de la musique arabe, savaient déjà quel lien unissait musique et mathématiques.

À partir de 772 (après J.-C.), Bagdad s'impose peu à peu comme le cœur des sciences. C'est Al Mansour, le deuxième calife de la dynastie des Abassides, qui choisit Bagdad pour capitale. Lui et ses successeurs transformèrent considérablement la ville, qui pendant plus de huit siècles symbolisera le savoir et la promotion de la connaissance.

Le modèle du savant arabe de l'époque est un esprit universel versé aussi bien en philosophie qu'en mathématiques, astronomie, physique ou médecine, mais aussi en histoire, géographie, poésie ou... musique. Abu Yusuf Ya Qub Ibn Ishak Al Kindi est l'un des représentants de l'école de Bagdad. Il est né à la fin du règne de Al Rashid, dont le successeur Al Mamun fonda la *Maison de la Sagesse*. Cette

La dynastie des Abassides : CHRONOLOGIE (après J. -C.)

754-775	Al Mansour
786-809	Al Rashid
813-833	Al Mamum
833-843	Al Mutasim
847-861	Al Mutawakkil

« maison » regroupait les savants des différentes disciplines et leur offrait des moyens de travail : bibliothèque, observatoire. Al Kindi a été l'un des directeurs les plus influents de cette sorte d'Académie. Il est aujourd'hui considéré comme le premier grand philosophe de l'Islam. Il œuvra à Bagdad sous les règnes successifs d'Al Mamun et d'Al Mutassim, mais lorsqu'à l'époque d'Al Mutawakkil l'influence de l'orthodoxie musulmane s'accrut, il fut exposé à des poursuites.

Mathématiciens musiciens

Al Kindi mena, comme les autres savants de son époque, un riche travail de traduction et d'analyse commentée des écrits des Grecs : Euclide, Archimède, Aristote, Apollonius, Héron, Ptolémée, Diophante. Ces recherches, capitales pour nous puisque certaines œuvres grecques nous sont parvenues via leur traduction arabe, ont donné lieu à d'importants développements sur la philologie et la linguistique et permirent d'approfondir bien des concepts. Les *Maisons de la Sagesse*, par le bouillonnement d'idées qu'elles ont suscité, ont fait voler en éclats les cloisonnements entre disciplines, facilitant la confrontation des savoirs, et permettant à des hommes comme Al Kindi ou Al Farabi d'être à la fois philosophes, musiciens et mathématiciens.

Au VIII[e] siècle, la musique arabe est un art raffiné. À la Cour du calife de Bagdad, les musiciens jouissent d'un statut privilégié et transmettent leur savoir dans de prestigieuses écoles. La musique arabe se développe alors sous la double influence de la Perse et de la Grèce. L'influence persane, dont le transfert du califat à Bagdad marque le triomphe, se retrouve dans des instruments comme le « oud », qui donnera notre luth. L'influence grecque quant à elle est perceptible à travers les instruments, comme le « qanoun », mais surtout dans la théorie musicale.

Al Farabi, de son vrai nom Abu Nasr Muhammad Ibn Muhammad Al Farabi (870? - 950?) s'appuie par exemple sur la conception d'Aristote selon laquelle

Les Maisons de la Sagesse, *par le bouillonnement d'idées qu'elles ont suscité, ont fait voler en éclats les cloisonnements entre disciplines*

les concepts mathématiques sont abstraits des propriétés des choses réelles, mais l'importance de son œuvre musicale lui donne plus d'influence que celle de son œuvre mathématique. On connaît surtout de lui des *Commentaires des difficultés rencontrées dans les introductions aux Livres I et V d'Euclide*. Il a, en musique, repris les conceptions de Pythagore en les enrichissant.

Al Kindi (? - 873), l'un des premiers à rédiger en arabe une description de l'arithmétique indienne, a cependant été très influencé par Platon. Il pense en effet comme ce dernier que la géométrie, les nombres, l'astronomie, les éléments sonores, sont liés par des rapports communs. Il sait toutefois s'éloigner de la conception grecque de la musique en liant le rythme musical à la métrique poétique par exemple.

De l'échelle grecque à l'échelle arabe

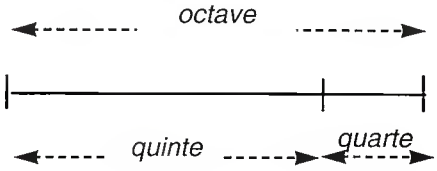
En étudiant les résonances harmoniques des notes, Pythagore montre qu'elle se répartissent selon des intervalles réguliers ayant entre eux des rapports artithmétiques prédéfinis : En plaçant un « chevalet » exactement au milieu d'une corde tendue, les deux parties de la corde, en vibrant lorsqu'on les pince, donnent le même son, à l'octave supérieure de celui que donne la corde entière.

En plaçant le chevalet au tiers de la corde, la partie la plus longue donnerait un nouveau son, à la quinte supérieure du son initial; l'autre partie, deux fois plus courte, donnant le son à l'octave de celui-ci.

Le chevalet placé au quart de la corde donnera, pour la partie la plus longue, un son « à la quarte » supérieure de la corde initiale.

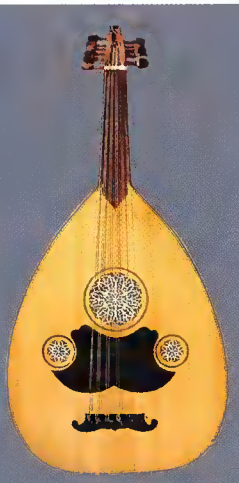
Les fréquences des sons émis étant inversement proportionnelles aux longueurs des cordes, si f désigne la fréquence (« harmonique » fondamental) correspondant à la corde initiale, 2f (« deuxième » harmonique) désignera celle de l'octave supérieure, (3/2)f celle de la quinte supérieure, et (4/3)f celle de la quarte supérieure.

Les Pythagoriciens n'ont pas, semble-t-il, dépassé le quatrième harmonique. Ils s'en sont tenus aux sons de fréquences f, 2f, 3f, 4f, les intervalles successifs entre ces quatre sons étant bien l'octave, la quinte (montante si le rapport des fréquences est 3/2, descendante s'il est 2/3) et la quarte (montante si le rapport des fréquences est 4/3, descendante s'il est 3/4). Leur **échelle musicale,** c'est-à-dire un nombre fini de réels appartenant à l'intervalle [f, 2f] peut ainsi être représentée par le schéma :



L'échelle de Pythagore consiste donc en une succession alternée de quintes montantes et de quartes descendantes ; on dit encore « progression de quintes ramenées dans l'octave ».

Le système tonal arabe est, lui, lié à la position des « frettes » (ou « sillets », barrettes métalliques transversales en saillie sur le manche d'un instrument à cordes) sur le manche du « oud »,



LE OUD

Cet instrument, qui a donné naissance au luth, est le symbole même de la musique arabe. Le oud actuel, qui ne comporte plus de frettes sauf peut-être en Tunisie est proche de celui utilisé au X^{e} siècle, et décrit par Al Farabi comme une caisse sonore et volumineuse presque hémisphérique, dont le manche est assez fortement coudé [...], la partie coudée portant les chevilles. Le nombre des cordes n'est toutefois pas le même, puisqu'à l'origine, le oud persan n'en a que deux, la bann et la zir. Deux autres cordes, puis une troisième, ont été par la suite ajoutées, par les Arabes, puis en Andalousie, par Ziryab.

LE QANOUN

C'est une cithare à 78 cordes, avec un chevalet posé sur cinq peaux de poissons, et de nombreuses frettes amovibles permettant d'obtenir jusqu'à 11 micro-intervalles dans un ton. Le nom de l'instrument est dû à Al Farabi. On lui aurait par la suite adapté un clavier, pour donner naissance au clavecin.

BIBLIOGRAPHIE
- **Youskhevitch** *Mathématiques arabes,* (VRIN)
- **Dahan, Peiffer** *Histoire des mathématiques,* (SEUIL)
- *Mathématiques en Méditerranée* (EDISUD)

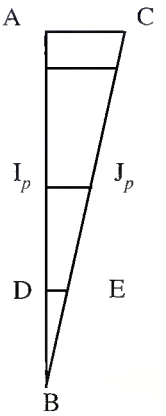
depuis le IX^{e} siècle. C'est Al Farabi qui procède à la division théorique de l'octave en 25 intervalles inégaux, dont certains seulement sont issus des quintes pythagoriciennes. Il construit à partir de là une gamme à 7 tons.

L'héritage des Arabes

Après une longue période d'abandon, les théories musicales arabes et leur expression mathématique refont surface avec la renaissance littéraire et musicale du XIX^{e} siècle, la *nahda*, liée d'ailleurs à l'expédition de Bonaparte en Égypte. C'est alors que le libanais Michael Meshaga (1800 - 1889), dans son traité *Limmas et commas*, indique un procédé permettant de trouver la longueur des intervalles successifs sur le manche du « oud ».

Si AB est la longueur de la corde initiale, le triangle ABC, rectangle en A, est tel que AC = (1/36)AB. D est le milieu de [AB], et [AD] est divisé en 24 partie égales, ce qui permet de construire les segments tels I_pJ_p.

Ce sont les longueurs de ces segments qui donneront les subdivisions du manche du « oud ». L'octave supérieure est obtenue en faisant le même travail sur [DE]. Les gammes sont alors



construites en prenant certains éléments de cette échelle à 24 notes.
Plusieurs questions vont se poser : *arrive-t-on, au bout des 24 frettes, exactement à l'octave supérieure ?*
Un calcul simple donne $I_pJ_p = AC(1–p/48)$. La position de la 24e frette est donc à une distance de

$$AC \times \sum_{p=1}^{p} (1 \frac{p}{48})$$

du haut du manche, c'est-à-dire de AC(71/72), ou, comme AC = AB/36, de (AB/2).(71/72)… au lieu de AB/2 !

À moins de 1% près, on « boucle » donc l'octave ! Autre question maintenant : *les intervalles ainsi construits sont-ils égaux ?* La position de la pe frette est, d'après le calcul précédent, donnée par :

$$X_p = AC \times \sum_{k=1}^{p} (1 \frac{k}{48})$$

c'est-à-dire :

$$\frac{AB}{36} \times \frac{p(95-p)}{96}$$

La longueur de corde qui vibre est donc : $l_p = AB - x_p$, et si on calcule le rapport entre deux longueurs de cordes vibrantes consécutives, on trouve :

$$\frac{I_p}{I_{p-1}} = \frac{p^2 - 95p + 345}{p^2 - 93p + 3362}$$

qui, il est vrai, est voisin de 1, puisque croissant environ de 1,02813 à 1,0293, puis décroissant jusqu'à 1,0274. La valeur du rapport varie donc peu.
Plus récemment, d'autres historiens se sont intéressés aux musiques arabes, tel

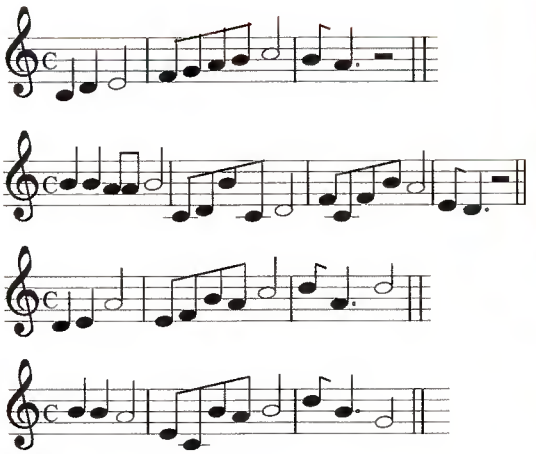
le Père Collangettes à Beyrouth, ou le baron Rodolphe d'Erlangen, qui se consacra à publier des traductions des grands textes théoriques sur la musique arabe, et organisa même le Congrès de Musique Arabe du Caire en 1932. Ils nous rappellent ainsi combien ces théories, un peu oubliées de l'histoire de la musique, sont riches d'enseignements.

N. V.

Jeux et énigmes

Solutions page 136

1. Phrases musicales par Alain Zalmanski

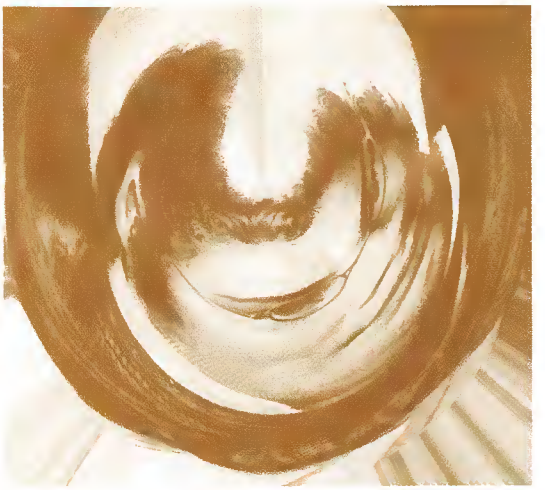


2. Mots à trouver par Alain Zalmanski

Chaque son ou syllabe correspondant à une note de musique a été remplacé par un autre symbole. Le codage change pour chaque mot.
Par exemple : *lieu d'élection* : ❤ ▲ ✂ **le** **pour do-mi-si le (domicile)**.

1. *une danse* : ◆ ✜
2. *un prénom* : ❤ ✂
3. *un autre prénom* : ▲ ✜ nie
4. *tour d'appel* : ◆ ✜ ✂
5. *impératrice* : ◆ ◆
6. *identique* : ❤ ▲ ✂ ire
7. *trompeur* : ◆ ✜ ✂ eux
8. *babillage* : ◆ ◆ ✜ on
9. *maladie infectieuse* : tu ◆ ✜ ✂
10. *diminuerait* : ◆ t ◆ ✜ ◆

3. Qui suis-je ? par Chen Apan



Voici l'anamorphose d'un compositeur célèbre. **Saurez-vous le reconnaître ?**

Les poètes

Louise de Vilmorin in *Alphabet des aveux*, NRF, 1954

L'art est docile à l'ami
La sole adorée dort et
L'ami l'a cirée, dorée.

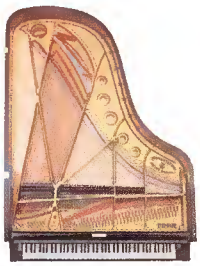
Robert Desnos in *Corps et biens (Langage cuit)*, Gallimard, 1953

Là ! L'Asie. Sol miré, phare d'haut, phalle ami docile à la femme, il l'adore, et dos ci dos là mille a mis ! Phare effaré la femme y résolut d'odorer la cire et la fade eau. L'art est facile à dorer : fard raide aux mimis, domicile à lazzi. Dodo l'amie outrée !

par Dominique Souder

De la gamme chromatique aux congruences

Diviser une octave le plus régulièrement possible en douze demi-tons débouche sur la théorie du groupe de congruence modulo 12. Un groupe dont les musiciens ont su depuis bien longtemps tirer toute la substance.

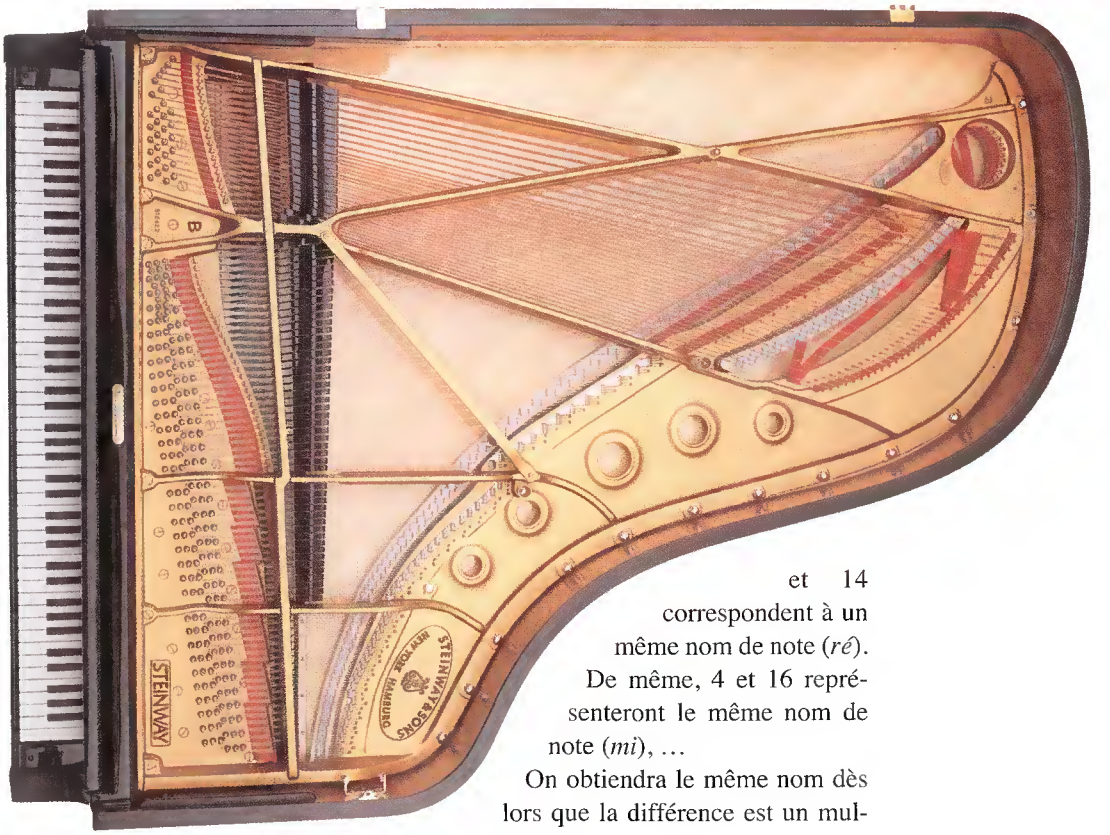


On appelle *fréquence* le nombre de fois qu'un phénomène de caractère périodique se répète identiquement à lui-même dans l'unité de temps choisie. La *hauteur* d'un son s'exprime par une fréquence, celle de la vibration correspondante. Prenons une note, par exemple un *do* joué sur un piano. Si on double sa fréquence, on obtient une note *à l'octave* de la première, plus aigüe, certes, mais qui lui ressemble tellement qu'on l'appellera *do* elle aussi. Sur votre piano, on a soigneusement divisé en douze parties, le plus rigoureusement égales possible, chaque octave, d'un do au suivant. C'est le clavier *bien tempéré* cher à Jean-Sébastien Bach.

La gamme chromatique

Mais que signifie *diviser en douze* l'octave allant d'un *do* au suivant ?
Ce n'est pas la division *arithmétique* de l'intervalle des fréquences que l'on choisit ; mais la division *géométrique*. En clair, on passera le plus régulièrement possible d'une note à la note suivante, non pas en ajoutant une même valeur à la fréquence, mais en multipliant la fréquence par une même valeur. En effet, dans le premier cas, la subdivision dépendrait de la note prise en référence (elle ne serait pas la même en allant de *do* à *do* que de *ré* à *ré*).
En pratique, si on prend comme unité la fréquence du *do* initial de votre piano (on attribue à cette note la fréquence 1), on obtient alors pour le *do* suivant la fréquence 2. Entre les deux, on passe d'une note à celle qui suit, plus aigüe d'un *demi-ton*, en multipliant la fréquence par la racine douzième de 2 (qu'on note $2^{1/12}$).

Do (départ) : $2^0 = 1$ → do dièse (l'usage fait qu'on ne dit pas ré bémol) : $2^{1/12}$ → ré : $2^{2/12}$ → mi bémol : $2^{3/12}$ → mi : $2^{4/12}$ → fa : $2^{5/12}$ → fa dièse : $2^{6/12}$ → sol : $2^{7/12}$ → sol dièse : $2^{8/12}$ → la : $2^{9/12}$ → si bémol : $2^{10/12}$ → si : $2^{11/12}$ → do (arrivée) : $2^{12/12} = 2$.



Par commodité, pour aller plus vite, on peut décider de désigner chaque note par le nombre n dans l'écriture $2^{n/12}$. Mi sera par exemple désigné par 4 (on pense $2^{4/12}$), et sol par 7 (on pense $2^{7/12}$). Ainsi, au lieu d'écrire la *gamme chromatique* sous la forme :

G = { do, do dièse, ré, mi bémol, mi, fa, fa dièse, sol, sol dièse, la, si bémol, si }

on écrira : G = { 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11}.

Transposition = addition

Considérons maintenant le *ré* de fréquence $2^{2/12}$. Il donnera à l'octave un *ré* de fréquence double, soit $2 \times 2^{2/12} = 2^{2/12+1} = 2^{14/12}$. On peut dire que 2 et 14 correspondent à un même nom de note (*ré*). De même, 4 et 16 représenteront le même nom de note (*mi*), …

On obtiendra le même nom dès lors que la différence est un multiple de 12.

Une autre façon de le dire est qu'on a le même nom de note pour tous les nombres dont la division (euclidienne) par 12 donne le même reste. Ainsi, 5, 17, 29, 41 correspondent à *fa* à des octaves différentes, car leurs restes dans la division par 12 est toujours 5.

On pourra alors représenter le nom de la note par ce reste qui peut prendre toutes les valeurs entières de 0 à 11. Ainsi, tous les *si* seront désignés par 11, etc.

On peut alors inventer une addition des notes, qui correspond à ce que les musiciens nomment *transposition*.

Quelques exemples de cette addition :

- 3 + 2 = 5 (3 demi-tons + 2 demi-tons = 5 demi-tons).
- 6 + 6 = 0 (6 demi-tons + 6 demi-tons = une octave, *fa dièse* + 6 demi-tons = *do*).

Le mathématicien affirmera : « 10 est le symétrique de 2 dans le groupe additif des entiers modulo 12 ». Le musicien traduira : « si bémol est le renversement de ré. »

BIBLIOGRAPHIE

Pierre Barbaud, *La musique, discipline scientifique*, Dunod, 1971.

• 9 + 5 = 2 (9 demi-tons + 5 demi-tons = une octave + 2 demi-tons, *la* + 5 demi-tons = *ré*).

Voici la « table » de cette addition entre éléments de G. En mathématiques, on dit que c'est la table d'addition du groupe de *congruence* modulo 12, ou encore du groupe des *classes résiduelles* modulo 12 (un bien grand mot pour désigner les restes de la division par 12).
Ce tableau donne tout simplement le reste de la division par 12 de la somme de deux nombres, en fonction des restes de la division par 12 de ces deux nombres.

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0	1
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0	1	2
4	4	5	6	7	8	9	10	11	0	1	2	3
5	5	6	7	8	9	10	11	0	1	2	3	4
6	6	7	8	9	10	11	0	1	2	3	4	5
7	7	8	9	10	11	0	1	2	3	4	5	6
8	8	9	10	11	0	1	2	3	4	5	6	7
9	9	10	11	0	1	2	3	4	5	6	7	8
10	10	11	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
11	11	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Les mathématiciens disent que G, muni de cette addition, a une structure de groupe. En particulier, vous pouvez remarquer que tous les éléments x de G ont un *symétrique*, un nombre y qui, additionné à x, donne 0, 10 est le symétrique de 2 (et vice versa), 6 est son propre symétrique.
Le musicien traduira : « *si bémol* est le renversement de *ré* (et réciproquement), *fa dièse* est son propre renversement ».

Sous-groupes et accords

Les musiciens ont aussi exploité une autre caractéristique de ce groupe : celle de posséder des sous-groupes, c'est-à-dire des parties P *stables* (en additionnant deux éléments de P, on retrouve un élément de P) sur lesquelles l'addition définit encore une structure de groupe.
Les sous-groupes de G (hormis G lui-même) sont $P_a = \{0\}$, $P_b = \{0 ; 6\}$, $P_c = \{0 ; 4 ; 8\}$, $P_d = \{0 ; 3 ; 6 ; 9\}$, $P_e = \{0 ; 2 ; 4 ; 6 ; 8 ; 10\}$.
Vous pouvez vérifier la *stabilité* de ces parties.
Voici, par exemple, la table d'addition de P_d.

+	0	3	6	9
0	0	3	6	9
3	3	6	9	0
6	6	9	0	3
9	9	0	3	6

Les musiciens exploitent les sous-groupes de G au niveau des accords.

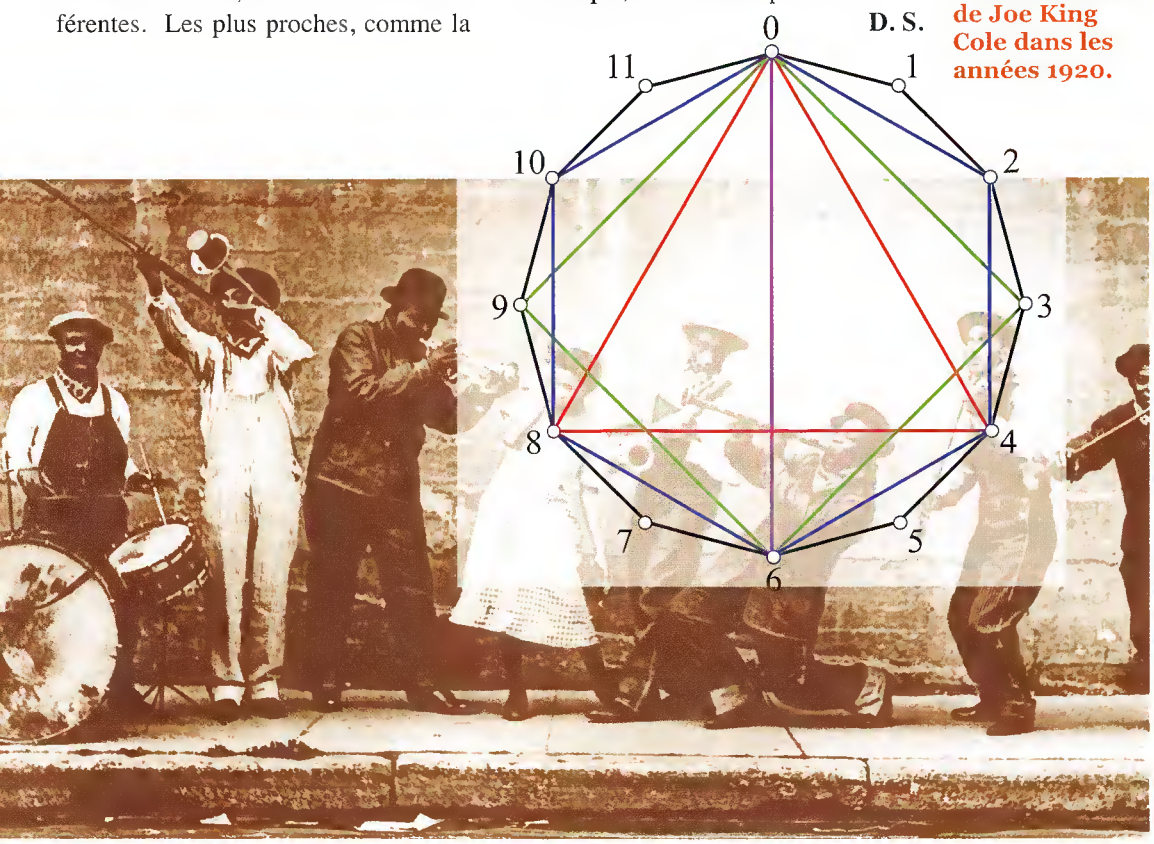
Ainsi,
P_a est le *do*
P_b est le *triton* (do, fa dièse)
P_c est l'*accord de quinte augmenté* (do, mi, sol dièse)
P_d est l'*accord de septième diminué* (di, mi bémol, fa dièse, la)
P_e est la *gamme par tons* (do, ré, mi, fa dièse, sol dièse, si bémol)

On peut représenter ces sous-groupes sous forme de polygones réguliers tracés sur un cercle.
Chantez donc les notes, de bas en haut puis de haut en bas pour chacune de ces parties.

Les gammes majeures

Et puis, tant que vous y êtes, chantez la *gamme*, dont la célébrité n'est plus à vanter :
Do, ré, mi, fa, sol, la, si…
Elle correspond à une autre partie de G, $P_0 = \{0 ; 2 ; 4 ; 5 ; 7 ; 9 ; 11\}$.
P_0, pour un musicien, s'appelle la *tonalité de do majeur*.
Ajoutons 1 à chaque élément de P_0 (transposons d'un demi-ton, comme disent les musiciens).
On obtient $P_1 = \{1 ; 3 ; 5 ; 6 ; 8 ; 10 ; 0\}$. C'est la tonalité de *do dièse majeur*. Et ainsi de suite, $P_2 = \{2 ; 4 ; 6 ; 7 ; 9 ; 11 ; 1\}$ est la tonalité de *ré majeur*, P_3 celle de *mi bémol majeur*, etc.
Nous obtenons les douze gammes majeures du langage musical.
Chose étonnante, elles sont toutes différentes. Les plus proches, comme la gamme de *do majeur* P_0 et la gamme de *sol majeur* P_7 ont six notes en commun sur sept. Les plus éloignées n'en ont que deux. À l'écoute, on passera plus facilement d'une gamme à l'autre quand elles sont proches.
Mais cette fois, les gammes en question n'ont plus rien emprunté aux mathématiques.
D'ailleurs, les parties P_0 à P_{12} sont beaucoup moins sympathiques sur le plan des mathématiques. Elle ne sont pas stables ! En additionnant par exemple certains des éléments de P_0, on n'obtient pas forcément un élément de P_0 ! Ainsi, 2 et 4, éléments de P_0, ont pour somme 6 qui n'en est pas.

Une considération qui doit inciter les mathématiques à une certaine modestie. Si elles sont un élément important dans la musique, elles ne sont pas le seul.



La gamme des « blue notes » caractérise le jazz des origines. Les troisième et septième notes de la gamme majeure sont abaissées d'environ un demi-ton ou légèrement décalées.
Le Creole Band de Joe King Cole dans les années 1920.

par Bernard Parzysz

Accord perdu

Les mathématiques de la guitare

Comment les mathématiques peuvent-elles venir en aide à un guitariste qui a perdu son accord (ou plus simplement laissé tomber son chevalet) ?

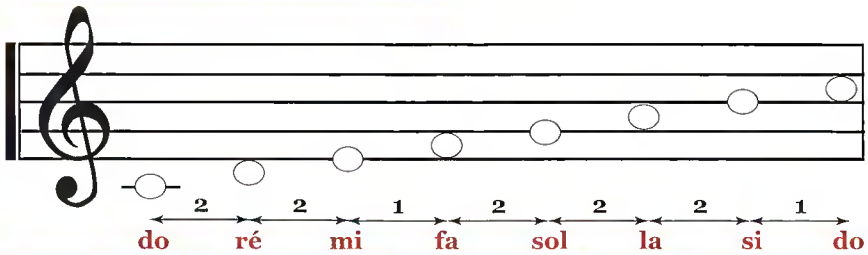
Zut ! Je m'apprêtais à remplacer les cordes de ma guitare, mais, en les détendant, le chevalet est tombé. Je ne sais plus où il était placé exactement. Me voilà propre ! Si une telle mésaventure vous arrive à l'avenir, vous ne serez plus dans l'embarras : grâce à un peu de mathématiques, vous vous en sortirez facilement.

Cordes sensibles

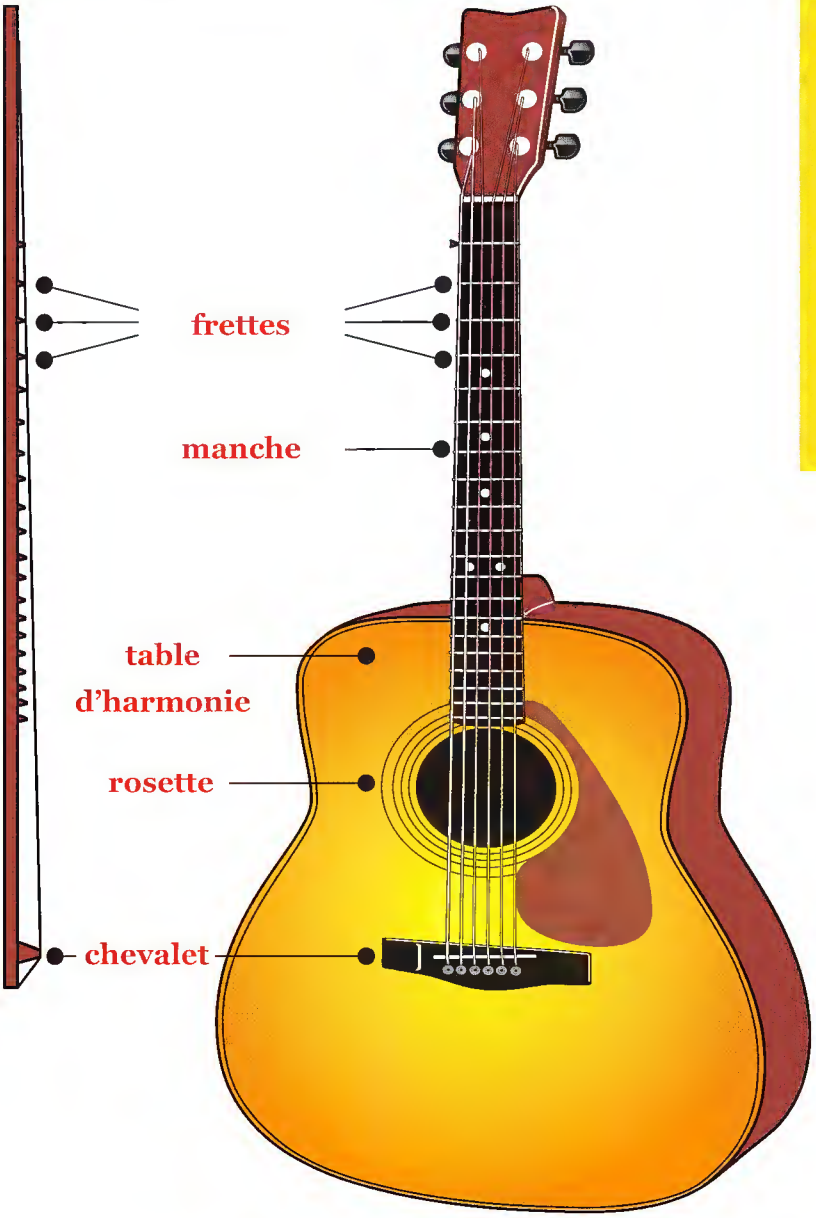
Observez tout d'abord une guitare en état de fonctionnement. Appuyez l'extrémité d'un doigt de la main gauche (l'index, par exemple) sur l'une des cordes, en un endroit quelconque d'une des cases du manche. Grattez ladite corde avec l'ongle d'un

La position du chevalet est symétrique de la première frette par rapport à celle de la dernière frette.

Écart en demi-tons entre les notes



Rappelons que l'octave est le plus petit intervalle séparant deux notes de même nom : intervalle sol-sol, par exemple. Le demi-ton, lui, est le plus petit intervalle dans la musique occidentale (gamme diatonique). L'octave se compose de douze demi-tons. La quinte de sept.



BIBLIOGRAPHIE

Serge Cordier, *Piano bien tempéré et justesse orchestrale*. Éd. Buchet-Chastel, 1982.

Bernard Parzysz, *Musique et mathématiques*. Éd. APMEP, 1983.

doigt de la main droite, le pouce, par exemple, au niveau de la rosette. Que se passe-t-il ? La corde ainsi sollicitée produit un son, dû à la vibration de la partie située entre le chevalet d'une part, et, d'autre part, la frette située à l'extrémité inférieure de la case où la corde est pincée.

Que se passe-t-il maintenant si vous déplacez le doigt de la main gauche sur la corde ?

Tant qu'il reste dans la même case, rien : le son obtenu est toujours le même. Mais si vous changez de case, le son va aussi changer : il sera plus aigu si vous avez déplacé votre doigt

Jimi Hendrix révolutionna le jeu de la guitare en utilisant sciemment les distorsions de la pédale « wha-wha » et les effets de saturation et de « Larsen ». Il jouait de la guitare non seulement avec les mains, mais, anecdotiquement, avec les dents.

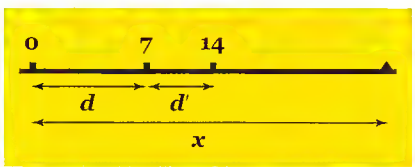
vers une case située plus bas sur le manche, plus grave si la case est située plus haut.

En fait, la « hauteur » du son émis, dépend de la fréquence de vibration de la corde, c'est-à-dire du nombre de vibrations par seconde. Cette fréquence est inversement proportionnelle à la longueur de la corde : $f = C/l$ où f est la fréquence, l la longueur de la corde qui vibre, et C une constante qui dépend de la corde elle-même (matériau, section, tension, ...) et des unités choisies.

Comparez à présent le son obtenu en faisant vibrer la corde « à vide » (c'est-à-dire sans appuyer), et celui obtenu lorsque le doigt est appuyé sur la case n° 12. Une guitare est ainsi faite que le deuxième son est, comme le disent les musiciens, « une octave au-dessus » du premier. Si l'on appuie sur la case n° 7, le son est « une quinte au-dessus » du premier, et si l'on appuie sur la case n° 14, il est une quinte au-dessus du précédent, donc deux quintes au-dessus du premier.

Revenons maintenant à votre guitare démontée, qu'il ne faudrait pas laissée à son triste sort. Prenez donc un mètre et mesurez et mesurez la distance d entre la frette n° 0 et la frette n° 7, puis la distance d' entre la frette n° 7 et la frette n° 14.

d' est égale au deux tiers de d ($d' = 2d/3$).



Appelons x la distance, inconnue, entre la frette n° 0 et le chevalet ; x est ainsi la longueur des cordes à vide.

La longueur qui vibre lorsque le doigt est sur la 7e case est donc égale à $x - d$; lorsqu'il est sur la 14e case elle est égale à $x - (d + d')$, soit : $x - 5d/3$.

Pour résoudre le problème, vous avez besoin d'un renseignement supplémentaire : l'intervalle (octave, quinte, etc.) entre un premier son, de fréquence f, et un deuxième son, de fréquence f', ne dépend que du rapport de ces fréquences. Autrement dit un intervalle est caractérisé par une valeur du rapport f'/f. si le deuxième son est plus aigu que le premier, ce rapport est plus grand que 1 ; et il est d'autant plus grand que l'intervalle est grand.

Sur la guitare, soit l la longueur de corde qui vibre pour donner un premier son, et la longueur qui vibre pour donner un deuxième son.

Puisque $f = C/l$ et $f' = C/l'$, un intervalle donné est caractérisé par une valeur du rapport l'/l. Si le deuxième son est plus aigu que le premier, ce rapport est plus petit que 1 ; et il est d'autant plus petit que l'intervalle est grand.

À l'aide des éléments précédents, il est facile de montrer que x est égal à $3d$.

En effet, le rapport des longueurs correspondant à la quinte est égal à

$$\frac{x-d}{x},$$

et aussi à $\dfrac{x-5d/3}{x-d}$.

D'où l'équation : $\dfrac{x-d}{x} = \dfrac{x-5d/3}{x-d}$,

qui conduit à $x = 3d$.

Vous savez maintenant où placer le chevalet.

La quinte ou l'octave ?

Une fois le chevalet mis en place, la frette n° 12 (celle qui correspond, on

l'a vu, à l'octave), est au milieu de la corde à vide.

En fait, c'est cette propriété que l'on utilise habituellement pour placer le chevalet : la position de celui-ci est symétrique de celle de la frette n° 0 par rapport à la frette n° 12.

On en déduit que le rapport des longueurs, pour l'octave, vaut 1/2.

Petit retour en arrière : nous avons utilisé un « renseignement supplémentaire ». Nous ne sommes pas en mesure de le justifier entièrement. Mais nous pouvons au moins vérifier sa vraisem-

blance, grâce à notre guitare maintenant remise en état. Appelons l_n la longueur de corde située entre la frette n° n et le chevalet ; on a donc $l_0 = x$ et $l_{12} = x/2$. Mesurons les distances l_0, l_1, l_2, ... et calculons les rapports successifs l_1/l_0, l_2/l_1, l_3/l_2... D'après le théorème, ils sont égaux : ils correspondent en effet au même intervalle : le « demi-ton ». Et on constate qu'effectivement ces rapports sont très sensiblement égaux.

Le rapport des longueurs pour l'octave est, on l'a vu égal à 1/2. Mais quel est le rapport k qui correspond au demi-ton, d'une case à l'autre ?

On a $l_1 = kl_0$, $l_2 = kl_1$, ..., $l_{12} = kl_{11}$ (on dit que la suite des l_i est géométrique). De ces égalités, on déduit $l_2 = kl_1 = k^2l_0$, et de même, on obtient, $l_3 = k^3l_0$, ..., $l^{12} = k^{12}l_0$.

Or, on a $l_{12} = l_0/2$. D'où $k^{12} = 0{,}5$.

Le nombre k est donc le nombre positif dont la puissance 12 est égale à 0,5 ; on le note $k = \sqrt[12]{0{,}5}$. La calculatrice donne $k = 0{,}943...$

On peut se demander quel est le rapport K qui correspond à la quinte.

La quinte est associée à l7. Or $l_7 = k^7l0$, donc le rapport des longueurs est $K = k^7$. La calculatrice donne K = 0,6674.

Le rapport K trouvé ici n'est pas tout à fait égal à 2/3, comme nos mesures nous l'avaient fait supposer au début ; mais il en est très proche : pour une corde de 60 cm de long, l'écart sur la position de la frette est de... 4 dixièmes de millimètre !

En fait, la solution qui correspond à notre système musical usuel est la seconde : on a une octave « exacte » (rapport des longueurs : 1/2) et une quinte un peu trop petite (en effet, la quinte « exacte » correspond à un rapport égal à 2/3, et K est un peu plus grand. Mais la seconde solution n'est pas du tout farfelue : ce système a été récemment proposé pour l'accordage des pianos, et donne de bons résultats ; on a cette fois une quinte « exacte » et une octave un peu grande.

Vérifions ce dernier point.

Nous avons ici K = 2/3. Le rapport de longueurs qui correspond au demi-ton est donc $k = \sqrt[7]{2/3}$, et par conséquent celui qui correspond à l'octave est $k^{12} = (\sqrt[7]{2/3})^{12}$, soit environ 0,499. L'écart sur la position de la frette n° 12 est de 0,6 mm pour une corde à vide de 60 cm.

Enfin l'essentiel est d'avoir pu réparer notre maladresse... Et maintenant, pour nous changer un peu les idées, que diriez-vous de jouer un petit quelque chose sur votre guitare remise à neuf ?

B. P.

Solutions

Jeux et énigmes de la page 31

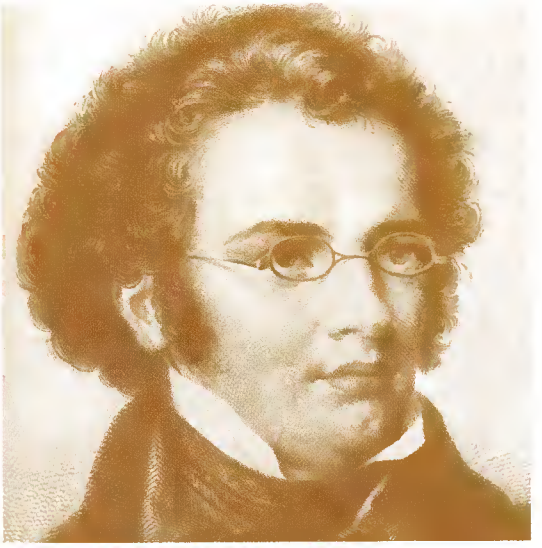
1. Phrases musicales par Alain Zalmanski

1. Doré mit face aux lacis d'eau Scilla.
2. Sicile à lacis d'eau, récit doré, fado facile à mirer.
3. Rémi, l'ami facile a doré la hutte.
4. Sissi, l'amie docile a ciré six sols.

2. Mots à trouver par Alain Zalmanski

1. Fado
2. Rémi
3. Sidonie
4. Minaret
5. Sissi
6. Similaire
7. Fallacieux
8. Lallation
9. Tularémie
10. Rétrécierait

3. Qui suis-je ? par Chen Apan



Franz Schubert.

par Bernard Parzysz

Le tempérament égal à travers le monde

De la Chine à l'Afrique en passant par la Thaïlande, nombreux ont été les théoriciens de la musique qui ont proposé des solutions aux problèmes d'échelle musicale. Dans le domaine, la variété est reine.

Réunion musicale dans un intérieur (détail) de Hieronymus Francken le jeune (1758-1623). © De Jonckheere

Nous avons vu (cf. pp. 14 à 16) que l'idée de diviser l'octave en intervalles égaux était apparue en Occident en raison des difficultés rencontrées pour résoudre certains problèmes de pratique musicale. Dès 1596, le flamand Simon Stevin (1548-1620) avait accordé un monocorde en partageant l'octave en 12 intervalles égaux. Cependant, l'année précédente, le prince chinois Tchou Tsai You avait déjà, de son côté, calculé ces intervalles avec encore plus de précision que lui. Le père Marin Mersenne (1588-1648) les imita un peu plus tard.

Certains musiciens sont partis de notre échelle tempérée égale à 12 notes pour composer de la musique dans d'autres systèmes, qui en dérivent. Ainsi, Claude Debussy (1862-1918) écrivit-il certaines de ces pièces dans la « gamme par tons », échelle à 6 notes qui consiste à ne considérer qu'une note sur deux de l'échelle usuelle (do-ré-mi-fa #-sol #-la #) ; c'est le cas en particulier de *Cloches à travers les feuilles*

L'empereur Xuanzong et sa favorite Guifei jouant de la flûte, Torii Kiyohiro (1737-1776) © B. N. F.

(1905), l'une de ses *Images pour piano*. Plus tard, Olivier Messiaen (1908-1992) intégra cette échelle dans ses *modes à transpositions limitées*.

On constate qu'il est facile de composer de la musique - et de la jouer sur des instruments « normaux » - dans un tempérament égal à n notes lorsque n est un diviseur de 12.

L'Américain Charles Ives (1874-1954), quant à lui, a composé de la musique en « quarts de ton », c'est-à-dire dans le système consistant à diviser l'octave en 24 intervalles égaux.

Comment jouer une telle musique ? C'est tout simple (il suffisait d'y penser) : on accorde deux pianos à un quart de ton d'écart, et l'ensemble des deux pianos fournit toute l'échelle (voir par exemple ses *Three pieces for two pianos*).

Plus curieux encore, l'Oulipien Luc Etienne (qui fut longtemps la « comtesse » du *Canard Enchaîné*) a écrit de la « musique décimale » (tempérament égal par 10) en utilisant un générateur de fréquences.

La gamme des solfèges

Mais il est une gamme dont certains lecteurs auront sans doute remarqué l'absence dans ce qui précède : la fameuse « gamme des solfèges », dans laquelle le ton (par exemple do-ré) est

Il est facile de composer et de jouer dans un tempérament dont le nombre de notes est diviseur de 12.

Bibliographie

Roland de Candé, *Histoire universelle de la musique,* (Éd. du Seuil, Paris 1978)

Serge Cordier, *Piano bien tempéré et justesse orchestrale,* (Éd. Buchet-Chastel, Paris 1982)

Luc Etienne, *Le tempérament décimal,* (Bulletin du GAM n° 6 bis, université Paris-7 1972)

Marc Honegger, *Science de la musique,* (Éd. Bordas, Paris 1976)

Olivier Messiaen, *Technique de mon langage musical,* (Éd. Leduc, Paris 1944)

Bernard Parzysz, *Musique et mathématique,* (Éd. APMEP, Paris 1983)

Urs Ramseyer, *L'art populaire à Bali,* (Éd. Office du Livre, Fribourg 1977)

divisé en 9 intervalles égaux (commas), le demi-ton chromatique do-do # (comme l'intervalle ré *b*-ré) correspondant à 5 commas, et par conséquent le demi-ton diatonique (do #-ré ou do-ré *b*) correspondant à 4 commas, selon le schéma suivant :

Comme l'octave comporte 5 tons et deux demi-tons diatoniques, elle est ainsi divisée en $(9 \times 5) + (4 \times 2)$, soit 53 commas. L'origine n'en est pas difficile à trouver : il suffit de se souvenir (cf. pp. 6 à 8) que 53 quintes bouclent à peu près la boucle (plus précisément, 53 quintes corrrespondent, à peu de chose près, à 31 octaves), et que ces 53 quintes subdivisent l'octave en intervalles de deux types seulement. C'est sur cette base que l'Allemand Nicolaus Kaufmann, dit Mercator (à ne pas confondre avec le Mercator de la projection cartographique) eut l'idée, en 1675, d'identifier ces deux intervalles, suivi en 1694 par l'Anglais William Holder (1614-1697) qui laissa son nom à ces commas « holdériens ».

L'idée de diviser l'octave en intervalles égaux n'est pas une exclusivité de l'Occident, comme on l'a vu avec Tchou Tsai You. L'une des deux échelles musicales officielles de l'Indonésie est le slendro, tempérament égal par 5. Il s'agit donc, comme pour la gamme « chinoise », d'une échelle à 5 notes, à cette différence près que tous les intervalles y sont égaux. On peut noter au passage que Debussy avait été très impressionné, lors d'une exposition universelle à Paris (le XIX^{e} siècle finissant en était friand), par un orchestre de gongs javanais (gamelan), et il faut sans doute voir là l'une des sources de sa « gamme par tons ». En Afrique occidentale, des ethnologues se sont intéressés à l'échelle des xylophones (balafon) des Malinké du Burkina Faso et du Mali, et ont pu constater qu'il s'agissait également (et de façon très précise) d'un tempérament égal par 5.

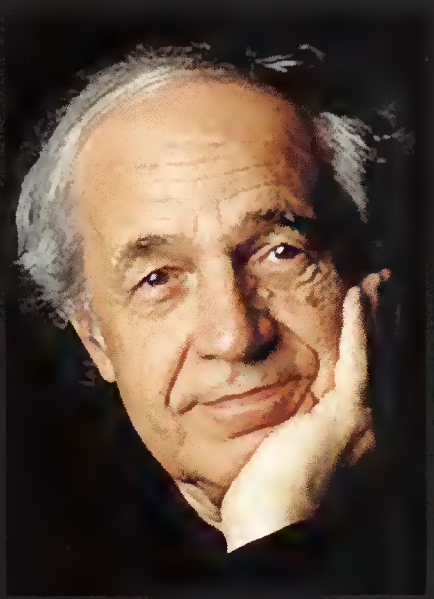
Des échelles à 7 notes égales

Loin de l'Afrique, en Thaïlande, l'échelle officielle est l'échelle équiheptatonique, c'est-à-dire le tempérament égal par 7 (également usité au Cambodge et en Guinée). Mais le fait le plus étonnant a été observé en Mélanésie, et plus précisément sur l'île de Malaita, l'une des Îles Salomon. L'instrument de musique essentiel des habitants de Malaita est la flûte de Pan en bambou, jouée en formation de plusieurs musiciens. Les mesures effectuées ont montré que l'échelle de ces instruments est précisément cette même échelle équiheptatonique, et qu'elle apparaît sous deux formes : soit tous les instruments de l'ensemble disposent de l'échelle complète des 7 notes, soit l'échelle est répartie sur une paire d'instruments, chacun disposant d'une note sur deux en alternance.

Sur cette même île, les flûtes d'un autre type d'ensemble sont dotées, elles, d'une échelle à 5 notes, ces notes étant extraites de l'échelle heptatonique. Il est frappant de constater la similitude de cette pratique avec la nôtre : nous disposons en effet d'une échelle à 12 notes (l'échelle chromatique en demi-tons égaux), dont est extraite notre échelle usuelle à 7 notes (la gamme, majeure ou mineure). Tout cela prouve, s'il était besoin, que la musique, comme la science, n'a pas de frontières.

B. P.

La composition



Symétrie et composition p. 46
Composition automatique et ordinateur p. 52
Pierre Boulez p. 56
celui qui a institutionnalisé la musique
Des matrices pour influencer le hasard p. 60
Iannis Xenakis p. 62
Bach mathématicien ? p. 68
3 minutes quatorze de bonheur p. 76
Schœnberg le maître de la musique moderne p. 82

Aujourd'hui, chacun sait qu'il est possible de composer de la musique avec un ordinateur. On n'ignore pas non plus que les mathématiques ont largement nourri l'inspiration de compositeurs contemporains comme Pierre Boulez ou Yannis Xenakis. En réalité, les compositeurs de musique n'ont pas attendu le XX^{e} siècle pour s'aider des mathématiques. Tant dans les palindromes musicaux de Joseph Haydn que dans les canons de Jean-Sébastien Bach, la symétrie est reine. Et si fibre mathématique et fibre musicale étaient liées ?

par Élisabeth Busser

Symétrie et composition

Le palindrome, nombre ou mot qu'on peut lire de droite à gauche comme de gauche à droite, est vieux comme le monde. Son existence dépasse de loin le cadre de la numération ou de la linguistique. En musique, des compositeurs renommés ont fait à la symétrie – facétie ou expression créative ? – le clin d'œil que nous découvrons ici.

2002 est un millésime étrangement symétrique, le 10/02/2001, le 20/02/2002 ont été des dates à double sens de lecture. Les amateurs de palindromes en connaissent dans tous les domaines : géographiques comme **Noyon** ou **Laval**, verbaux comme **radar** ou **sas**, numériques comme **1001**, **1111**, **1221**, **1991**, **2112**, chronologiques comme **01/02/2010** ou **21/02/2012**, nos prochaines dates symétriques.

De la symétrie des mots...

Des phrases entières peuvent aussi former des palindromes, à condition, comme le précisait Luc Etienne, spécialiste incontesté des jeux de langage, de ne tenir compte « ni de la séparation des mots, ni de la ponctuation, ni des apostrophes, accents et signes diacritiques ». « Esope reste ici et se repose » en est l'exemple le plus célèbre.

VICTORIA

Il existe des palindromes graphiques comme cette tête d'élève facétieux qui retournée montre un directeur d'école ronchon ou cet "ambigramme" créé par John Langdon qui se lit de la même façon à l'endroit et à l'envers.

Des Anciens comme Quintilien, rétheur latin (« roma tibi subito motibus ibit amor ») aux auteurs plus récents comme Louise de Vilmorin : « Rue, verte fenêtre, verte nef, et rêveur », en passant par Cyrano de Bergerac : « À révéler mon nom, mon nom relèvera », chacun y est allé de son texte palindrome. Mais c'est bien sûr Georges Perec qui détient la palme, avec « 9691 », un palindrome de cinq mille lettres composé en 1969, qui commence par « Trace l'inégal palindrome. Neige. Bagatelle… » et finit par « Haridelle, ta gabegie ne mord ni la plage ni l'écart ».

Luc Etienne va même plus loin en inventant les palindromes syllabiques : « Quand de deux mots la patrie délivre la Française : cher passé. C'est pas cher seize francs la livre de tripe(s) à la mode de Caen », et même des palindromes phonétiques : « Rossellini y nie l'essor » ou « Angèle et Laurent enrôlaient les gens ». De la phonétique à la musique, il n'y a qu'un pas.

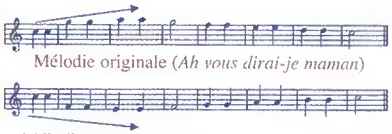
… à la symétrie des notes

La symétrie, on l'a vu, permet bien des astuces d'écriture. Les musiciens ne se sont pas privés de l'utiliser pour tracer sur leurs portées mouvements contraires, mouvements rétrogrades et autres palindromes, musicaux cette fois. Il faut dire que si la composition

La qualité auditive d'une musique reste à peu près invariante par symétrie.

aléatoire réserve quelquefois des surprises désagréables pour l'oreille (voir l'article suivant), la qualité auditive d'une musique reste à peu près invariante par symétrie : une musique agréable le demeurera si on symétrise son écriture.

Certaines formes d'écriture musicale comme le contrepoint et le canon se prêtent mieux que d'autres à cette symétrisation. Le contrepoint a pour objet de superposer des lignes mélodiques. Cette superposition peut se faire en particulier par mouvement contraire, où la montée devient descente, comme dans cette mélodie, où vous reconnaîtrez tous « Ah vous dirai-je maman » :



Mélodie originale (*Ah vous dirai-je maman*)

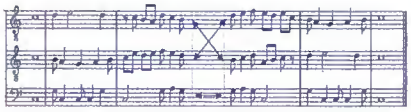
Mélodie transformée par mouvement contraire

La superposition peut aussi se faire par mouvement rétrograde, en écriture-miroir, comme ci-dessous :

Début de la mélodie reprise par mouvement rétrograde

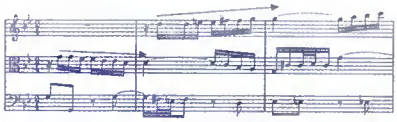
On entre ici dans des écritures musicales subtiles, comme a su en faire par exemple Guillaume Machaut au XIV^{e} siècle, où les voix repartent dans l'autre sens au bout de vingt mesures, les parties supérieures s'échangeant.

Le titre est évocateur : « Ma fin est mon commencement et mon commencement ma fin ».



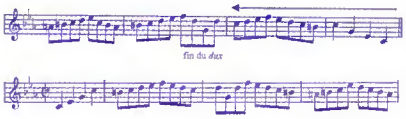
Ma fin est mon commencement et mon commencement ma fin de G. Machaut

Dans le canon à deux voix par exemple, à la voix entrante , le « dux », succède la seconde voix, le « comes », et là aussi toutes les variantes sont permises, y compris la progression du comes par mouvement contraire, respectant une certaine forme de symétrie, comme dans *Les Variations Goldberg*, de J.-S. Bach, pour clavecin à deux claviers :



Canon à la quinte par mouvement contraire dans les *variations Goldberg* de J.-S. Bach

On peut encore utiliser le mouvement rétrograde dans le canon. Il est alors dit « à l'écrevisse ». Là, on trouve le comes en lisant le dux à partir de la fin.



fin du dux

Bach, Mozart et Haydn aussi

Bach, par exemple, a répondu au défi musical du roi Frédéric II, flûtiste au demeurant, lui demandant d'improviser une fugue à six voix sur un thème particulièrement difficile. Le compositeur s'est refusé à l'improvisation, mais a réalisé pour le roi non seulement des fugues à trois voix et à six voix, mais une sonate et de nombreux canons constituant l'*Offrande Musicale*, éditée en 1747, véritables problèmes musicaux, où il laisse deviner le comes en donnant simplement le dux.

Le même Jean-Sébastien Bach, toujours aussi amoureux de symétrie, va

aussi donner deux versions, rectus et inversus, de la *Fugue à quatre voix* n° 16 de son *Art de la Fugue*, où il permute, entre les versions, les deux voix extrêmes et les deux voix moyennes, les liant en plus chacune par un mouvement rétrograde… bel exploit !

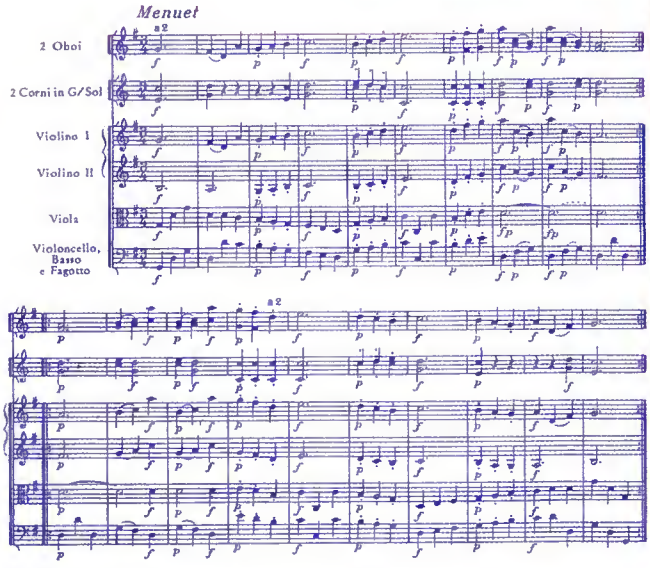
Un peu plus tard, c'est au tour de Haydn de composer sa symphonie n° 47, qu'il a d'ailleurs baptisée *das Palindrom* dont la deuxième partie du troisième mouvement (minuetto al reverso) reprend à l'envers les dix premières mesures de la première partie.

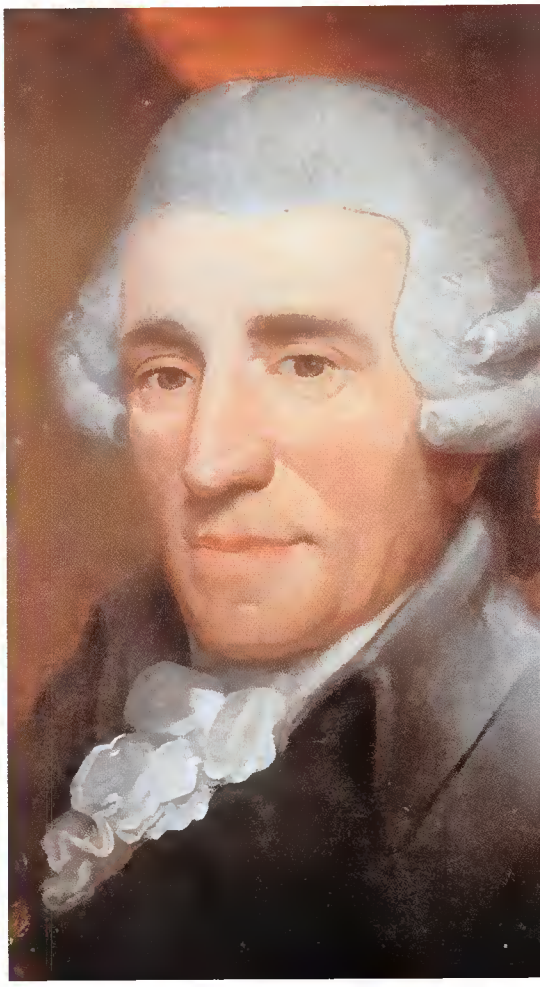
Mozart, plein d'humour comme toujours, n'a-t-il pas lui aussi, encore un peu plus tard, écrit cette transcription pour guitare d'un canon à deux voix… où il n'y a pourtant qu'une seule partition ! Lisez-la, et vous comprendrez vous-mêmes : elle peut se lire à l'endroit comme à l'envers, et la seconde mélodie se lit en retournant la partition, si bien que les musiciens peuvent exécuter le morceau en se plaçant de part et d'autre d'une table : astucieux, non ? Si on sait lire entre les lignes, on voit que cette partition ressemble à un palindrome sans en être un tout à fait : on croit que les voix sont à l'octave tout le long, mais dès la quatrième mesure, la symétrie flanche, à la cinquième les voix sont à la tierce, à la septième à la quarte. Vous saurez sûrement traquer toutes les autres différences dont le facétieux Mozart a parsemé ce morceau !

É. B.

Haydn

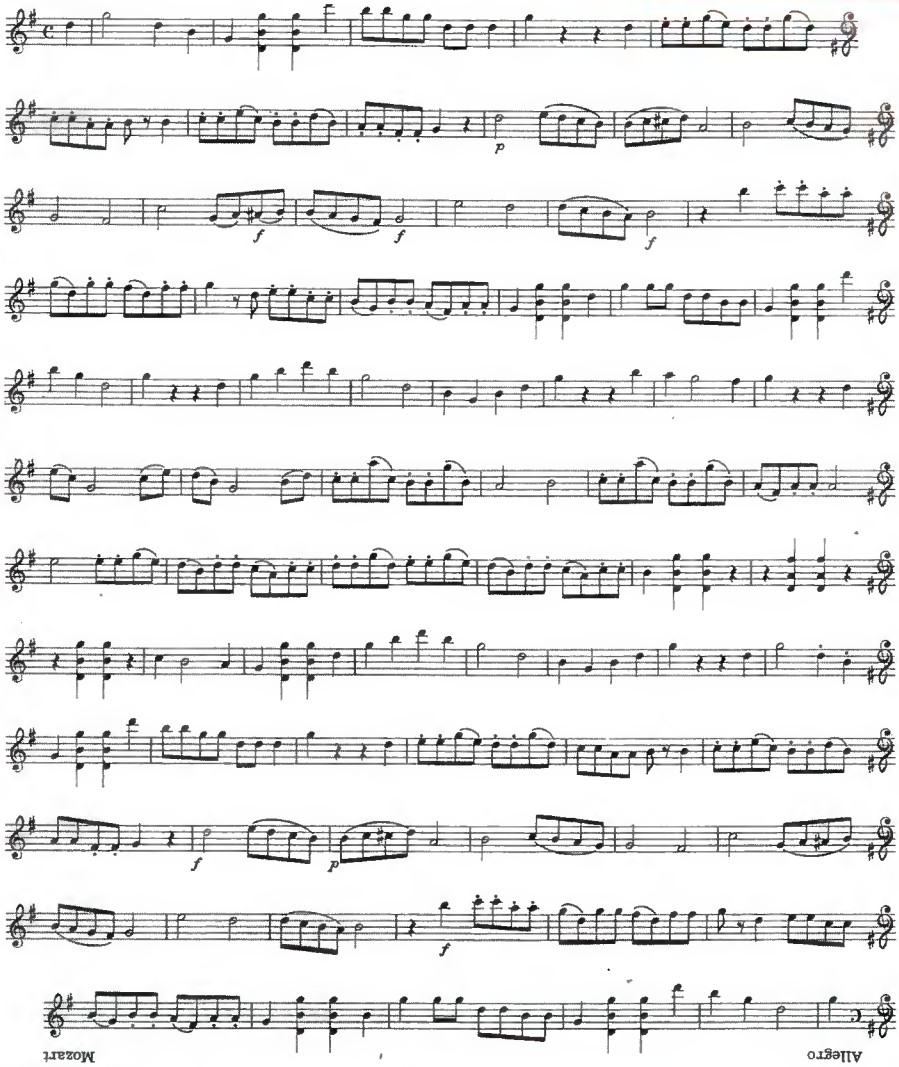
Menuet de la *Symphonie* n° 47, *"Das Palindrom"*





Mozart
Le canon palindromique

Mozart, plein d'humour, a écrit cette transcription pour guitare d'un canon à deux voix… où il n'y a pourtant qu'une seule partition ! Lisez-la, et vous comprendrez vous-mêmes : elle peut se lire à l'endroit comme à l'envers, et la seconde mélodie se lit en retournant la partition, si bien que les musiciens peuvent exécuter le morceau en se plaçant de part et d'autre d'une table : astucieux, non ?



Musique décimale

Luc Etienne, professeur de mathématiques à l'origine et membre de l'Oulipo, était également acousticien et bon altiste. Il fut un des premier à utiliser les possibilités du magnétophone pour composer des palindromes phonétiques ou des transregistrements. Il transposa également certaines œuvres du répertoire classique pour son alto ou un piano accordé en divisant la gamme non pas en 12 mais en 10 parties égales. Il existe également des gammes heptaphoniques par exemple dans l'île de Java.

Dans l'écriture stéphanolucienne, on aura des demi-quintes au lieu de demi-tons et seul le fa # restera commun aux 2 gammes à 12 demi-tons ou à 5 demi-quintes. Il a été démontré que ce système tonal permettait des accords fondamentaux de 3 sons et simplifiait les règles de composition et d'harmonie. Pourrait-on écrire de la bonne musique avec ce système ? La question est la même que pour toute musique de tempérament autre que celui auquel nous sommes habitués.

Lipogrammes musicaux

Un lipogramme consiste à écrire une phrase sans utiliser une ou plusieurs lettres données.

« *Bonjour à vous maçons de tous pays* » est un lipogramme en *i*.

« *Cher Webern, les pensées écervelées de Berg se rebellent et s'entremêlent derechef* », est un lipogramme en *a i o u y*.

De même il existe des gammes qui se privent de notes en utilisant comme les Chinois, les Péruviens ou les Esquimaux, 5 notes seulement. Mi sol la do ré par exemple pour l'air péruvien *Kaypipas* ou do fa sol la ré pour le fameux air … écossais *Ce n'est qu'un au revoir mes frères*. La transposition et l'harmonisation de ce type de gamme comme celles des modes autres que ceux de do (et de la) sont particulièrement délicates.

Alban Berg et le chiffre 3

Le *Kammeronzerte* (concerto de chambre) composé par Alban Berg, entre 1923 et 1925, pour le cinquantième anniversaire de son maître Arnold Schœnberg est délibérément organisé autour du chiffre 3.

Trois mouvements de 240 ou 480 mesures. **Trois** familles instrumentales. **Quinze** musiciens. **Trois** types de langages musicaux : tonal , atonal, sériel.

Hommage à la « **Trinité** viennoise » Schœnberg, Webern, Berg.

Les **trois** tonalités qui apparaissent sont contenues dans les noms des dédicataires B (si bémol) E (mi), G (sol) en notation allemande.

Un CD (Harmonia Mundi) interprété par Marie-Joseph Jude, Peter Csaba et Jean-François Heisser vient de sortir : superbe illustration de la contrainte musicale qui n'enlève rien au lyrisme et à la beauté de la musique de Berg.

par É. Busser & D. Souder

Composition automatique et ordinateur

La musique est, selon le mot de Leibniz, "un calcul secret que l'âme fait à son insu". Les ordinateurs ayant en particulier pour but de se substituer à l'esprit humain dans le domaine du calcul, il n'est pas étonnant que l'informatique se soit, dès son avènement, emparé de la composition musicale. Avec un succès incontestable en terme de renouvellement du genre, mais pour des résultats contestés en termes d'esthétique.

W. A. Mozart

Est-il possible de composer de la musique en remplaçant l'inspiration par le hasard ?

La composition automatique ne date pas de l'ordinateur. La plupart des grands compositeurs classiques s'y sont essayés (voir l'article sur les palindromes musicaux en page 20), essentiellement pour constituer des symétries multiples dans les morceaux. Mais certains, et non des moindres, ont aussi imaginé des compositions aléatoires si chères à Iannis Xenakis (voir notre article en page 62). Le premier procédé de composition aléatoire date de la fin du XVIII^{e} siècle : il s'agit du *Ludus Melothedicus*, attribué (à tort) à Mozart ou à Haydn. Mais Mozart n'allait pas rester longtemps en reste.

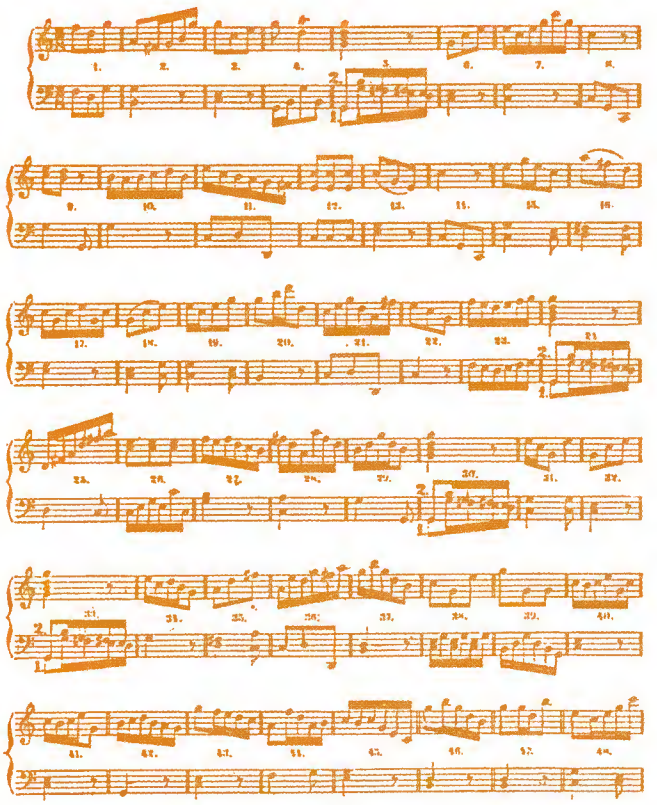
Composer comme Mozart !

Si « Dieu ne joue pas aux dés » (Einstein), le divin Wolfgang Amadeus, lui, n'a pas hésité à s'amuser à composer en 1791 une *Musikalische Wurfelspiel* qui en fait le précurseur de la musique aléatoire. Mozart en effet a si bien maîtrisé l'idée de l'intervention de l'aléatoire dans la structure d'ensemble du message musical, qu'il a imaginé une méthode pour composer des mélodies en... jouant aux dés.

Chacun des lecteurs de ***Tangente*** peut composer sans connaissances musicales particulières une musique qui pourrait être attribuée à Mozart ! Voici par exemple comment composer une valse avec, pour tous ingrédients, deux dés et une *table de musique*, jeu de 176 mesures à trois temps numérotées signées Mozart (voir page suivante).

1ère mesure de la valse : on fait un premier jet de deux dés, on totalise les

Musikalische Wurfelspiel (W. A. Mozart)



	A	B	C	D	E	F	G	H
2	96	22	141	41	105	122	11	30
3	32	6	128	63	146	46	134	81
4	69	95	158	13	153	55	110	24
5	40	17	113	85	161	2	159	100
6	148	74	163	45	80	97	36	107
7	104	157	27	167	154	68	118	91
8	152	60	171	53	99	133	21	127
9	119	84	114	50	140	86	169	94
10	98	142	42	156	75	129	62	132
11	3	87	165	61	135	47	147	33
12	54	130	10	103	28	37	106	5

points. Par exemple on trouve 9. On regarde dans le tableau à l'intersection de la ligne 9 avec la colonne A. On lit 119. On va dans la table de musique prendre la mesure de Mozart numéro 119, qui sera la première mesure de votre valse.

2e mesure de la valse : on fait un deuxième jet de deux dés dont on totalise les points, par exemple 7. On lit à l'intersection de la ligne de 7 et de la colonne B le numéro 157 qui sera celui de la mesure de la table de Mozart à recopier.

On recommence ainsi, jusqu'à avoir huit mesures (structure habituelle de la valse), après lesquelles on met sur la partition une double barre de mesure indiquant la répétition de leur ensemble.

On peut poursuivre pour une deuxième partie de la valse, et allonger la durée du morceau voulu, selon la même technique.

Signalons que l'ordinateur fut utilisé par D. A. Caplin dès 1955 pour la programmation de cette *Musikalische Wurfelspiel* de Mozart.

Du bruit blanc au bruit brownien

Au XIXe siècle, des *machines à composer* mécaniques, ou *componiums*, voyaient le jour.

Les débuts de la composition assistée par ordinateur

1957 : La première œuvre calculée. *Suite Illiac*, produite par Lejaren Hiller et Isaacson à l'Université d'Illinois. Elle était basée sur un filtrage de nombres pris au hasard par des règles d'enchaînement tonal puis atonal. Sa qualité musicale n'était pas inoubliable…

1959 : Mathews, Pierce, Gutmann (Bell Telephone Company). Travail sur la synthèse des sons.

1960 : Pierre Barbaud, Paris. Utilisation d'algorithmes et de groupes de permutations.

1961 : Iannis Xenakis (voir page 62). Réalisation d'une œuvre musicale dont le modèle est constitué par une matrice dimensionnelle. Chaque case précise, pour une unité de temps, la famille instrumentale, le type d'évènement, la densité moyenne, répartis stochastiquement à partir de la loi de Poisson, d'où la dénomination de musique stochastique.

1962 : André Riotte. Utilisation de l'ordinateur pour trier des sons, fabriquer un matériau "cycles équilibrés".

1964 : Gotfried Koenig (studio de musique électronique d'Utrecht). Préprogrammation du passage de la variation maxima des paramètres à un certain taux de répétition.

1968 : Alan Sutcliffe. Subdivision fine des hauteurs de son (90 dans une octave) pouvant être traduite en sons électroniques.

Au début du XX^{e} siècle, l'écrivain Raymond Roussel, fasciné par ces componiums, créait dans ses livres des machines musicales qui préfigurent la génération algorithmique à contraintes probabilistes de Xenakis. Les matériaux musicaux y étaient engendrés par des phénomènes aléatoires tels que … le mouvement des pattes d'insectes filtré à travers un système de contraintes représentant les règles de l'harmonie. La musique stochastique de Xenakis n'était pas bien loin…

Pour ce qui est de la ligne mélodique et du rythme, on peut passer d'un extrême à l'autre : de la musique complètement aléatoire, où chaque note n'est en aucune façon reliée aux précédentes (bruit blanc), à la musique complètement corrélée, où chaque note dépend étroitement des précédentes (bruit brownien). L'aléatoire aussi bien que la corrélation vont résider dans la succession des notes, et dans leur durée. Ainsi, en musique dodécaphonique ou sérielle, la fré-

quence d'apparition est strictement identique pour chaque note.
Ces deux musiques sont facilement simulées sur ordinateur : la musique blanche, où les notes n'ont aucun souvenir, pourrait se *fabriquer* en tirant au sort les notes de la gamme, la musique brownienne, où les notes se souviennent d'où elles viennent, en tirant au sort les intervalles entre une note et sa suivante.

Et la musicalité dans tout cela ?

Pour le *Musikalische Wurfelspiel*, l'histoire ne dit pas qu'il fallait le génie de Mozart dans la composition de sa table pour que cette musique soit agréable à entendre, mais les amateurs vous le diront : ni la musique blanche ni la musique brownienne ne sonnent bien à l'oreille.
Pour que les mélomanes y trouvent leur compte, il faut une création intermédiaire : les spécialistes la nomment « musique en $1/f$ ». On la recrée facilement sur ordinateur, en associant par exemple à chaque note d'une suite de seize notes consécutives la somme des chiffres de trois dés, un rouge, un bleu, un vert. On numérote les lancers par un code binaire à trois chiffres (les nombres de 0 à 7), qu'on écrit en colonnes, en associant à chaque colonne une couleur de dé. À chaque lancer on ne jette que le ou les dés qui correspondent à un changement de chiffre du code. Les morceaux ainsi construits sont modestement corrélés car les chiffres les moins significatifs (ceux de droite) changent souvent, et les plus significatifs (ceux de gauche) changent moins souvent. Il semblerait que toutes les bonnes musiques soient « en $1/f$ », mélange de prévisible et d'insolite, que les grands compositeurs savent si bien faire, tout en respectant les règles de leur écriture musicale.
Au risque de décevoir les adversaires de l'intervention humaine, il semblerait néanmoins que la méthode prônée par Xenakis soit la plus raisonnable : si les processus aléatoires fournissent des « matériaux », lors du passage du « matériau » à l'écriture définitive, l'artiste est indispensable.

E. B. et D. S.

BIBLIOGRAPHIE

Catalogue de la manifestation "Musique et Ordinateur" (du 3 au 19 mai 1983) au Campus d'Orsay (Université Paris Sud), édition du Centre Expérimental du Spectacle, Tour Octobre, 91940 Les Ulis (dirigée par Claude Malric).

DISCOGRAPHIE

Xenakis (voir page 62).
Pierre Boulez *Répons...*
John Cage (dont des compositions aléatoires utilisant le I Ching, oracle chinois).
Jean-Claude Risset.

Sitographie

Centre d'Études et de Recherche Pierre Schaeffer
http://www.univ-paris13.fr/centrepierreschaeffer.html

IRCAM Institut de recherche et de coordination acoustique/musique
http://www.ircam.fr

LAM - Laboratoire d'Acoustique Musicale
Unité Mixte (Paris VI/CNRS/Ministère de la Culture) de Recherche n° 7604
http://www.lam.jussieu.fr

THELEME CONTEMPORAIN
Création et promotion de la musique contemporaine
Page d'annuaire des organismes français d'informatique musicale et de musiques électroacoustiques.
http://altern.org/tc/

SFIM Société française d'informatique musicale
http://www.sfim.org/

AUDIORAMA
Studio de création musicale et sonore
http://www.agat.net/audiorama/somfr.html

par Norbert Verdier

Pierre Boulez

celui qui a institutionnalisé la musique

Pierre Boulez
D. R.

Pierre Boulez, compositeur, analyste, chef d'orchestre, mathématicien, pédagogue, animateur et professeur au Collège de France, a apporté à la musique contemporaine ce qui lui manquait avant tout : une base théorique, des structures pérennes et des lettres de noblesse.

Pierre Boulez est l'un des créateurs de la musique dite « abstraite », « aléatoire » ou « contemporaine », qui allie hasard, musique et mathématiques.

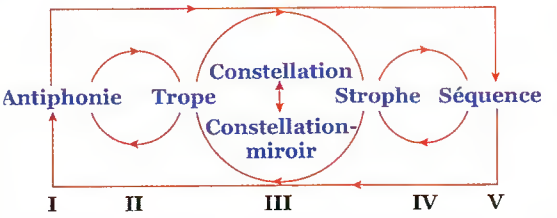
« Je suis né en 1925, NOUS DIT l'enfant terrible de la musique contemporaine, dans une toute petite ville de 7 000 habitants (Montbrison, près de Saint-Etienne), où il n'y avait absolument aucune vie musicale. Peut-être un récital de piano de temps en temps, avec au programme Chopin, Listz… Et ce une fois par an, pas davantage, dans la salle de cinéma ! Comme j'étais trop jeune, on ne m'y emmenait pas parce que c'était trop tard le soir.

Mon éducation musicale s'est faite de manière banale : étant fils de petits bourgeois, la sœur jouait du piano, donc le frère a dit : moi aussi, je voudrais apprendre le piano… Et là, soudain, un nouveau domaine m'a frappé complètement. Inscrit dans un collège religieux, le seul collège de la ville, j'y ai chanté dans la chorale, j'ai eu connaissance de la musique religieuse, du grégorien ; mais de tous les gamins, que j'y côtoyais, pas un n'a versé dans la musique. Et moi, je n'ai entendu mon premier concert d'orchestre qu'à seize ans ! Pas avant ! Je suis pratiquement comme une graine qui aurait poussé sur du rocher. Ce n'est pas courant, mais on voit des arbres pousser sur des rochers, et au contraire des terrains très bien irrigués où il ne pousse rien, où les arbres pourrissent ! Il y a là un côté hasardeux, et plus je vais, plus je fais confiance au hasard.

Hasard ! Le maître-mot de la vie de Boulez est prononcé. Après Montbrison, il poursuivra des études de sciences, avec une prédisposition pour les mathématiques. Il passera son bac à Saint-Etienne puis fera la classe de mathématiques supérieures chez les frères lazaristes à Lyon. Il abandonnera les classes préparatoires pour *monter à Paris*, se consacrera à la musique, tout en donnant des leçons de mathématiques pour avoir de quoi vivre. Dans sa petite chambre de bonne, il s'adonnera à de subtiles combinaisons entre hasard, musique et mathématiques. La musique de Pierre Boulez, héritière des

LA TROISIEME SONATE POUR PIANO

Dans sa *Troisième Sonate* pour piano, Boulez a défini sa structure musicale comme un graphe orienté constitué de cinq sommets et de cinq « formants » (arêtes), comme sur le dessin central.



L'interprète peut donc se promener le long de ces formants en suivant les différents chemins possibles prédéfinis par le compositeur. Il y a donc une certaine mais relative liberté d'interprétation. Par exemple, le formant *Trope* peut être exécuté avant ou après *Constellation* ou *Constellation-Miroir*.

Trope se compose de quatre parties juxtaposées sans interruption, qui, par une disposition cyclique, donnent la possibilité de huit parcours différents. Le morceau central, *Constellation*, est constitué lui aussi de plusieurs parcours, parmi lesquels l'interprète peut choisir. Chaque parcours comporte également plusieurs variantes laissées au choix du pianiste.

Pierre Boulez combine donc à la fois des éléments de théorie des graphes et de théorie des permutations. L'art de Boulez s'éclaire grâce à ses références littéraires (Mallarmé et Joyce entre autres) ou picturales (Klee).

Considérez le fameux vers de Molière « Belle Marquise vos beaux yeux me font mourir d'amour ». Il comporte dix mots. Si on les permute, il y a 10 ! (factorielle 10) vers possibles.

Certaines de ces permutations ne perturbent pas le sens du vers comme « d'amour Belle Marquise vos beaux yeux me font mourir ». En revanche, certaines n'ont aucun sens comme « d'font yeux Marquise vos mourir beaux belles amour me ». Tout l'art de Boulez est là ! Par la structure qu'il a rigoureusement établie, il empêche l'interprête de choisir des options inaudibles.

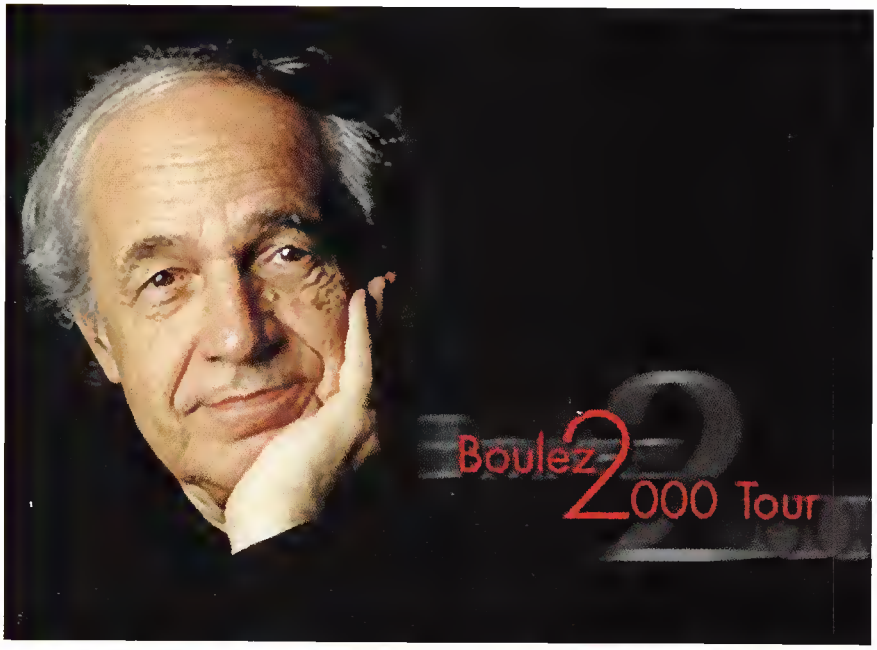
On peut également percevoir une analyse semblable dans le tableau de Vasarely intitulé *Zett ZK*. Reprenons cette composition à la manière de Boulez. Soit un tableau carré constitué de 20 sur 20 petits carrés. Chaque petit carré sera peint en vert selon dix nuances de vert numérotées de 1 à 10. Si l'on ne considère que la théorie des permutations, avec ces seules hypothèses, il y aurait 10^{400} tableaux possibles. Mais certains choix heurteraient notre émotion esthétique. Par exemple, on pourrait exiger que chaque petit carré soit touché par un petit carré avec un écart de nuance inférieur ou égal à deux. Au fait, avec ces conditions sauriez-vous définir le nombre de tableaux possibles ?

Tout le problème de Boulez est d'être assez rigoureux pour que la lecture de la partition faite par l'exécutant prenne du sens.

Ainsi, si chaque interprétation est unique, l'œuvre, qui est, comme diraient les mathématiciens, la « classe » de toutes les interprétations possibles, a néanmoins son unité.

Le critique d'art Antoine Goléa disait : « J'ai entendu, à ce jour, la *Troisième Sonate* de Boulez dans quatre interprétations différentes. Ces différences n'ont jamais modifié l'impression fondamentale que l'œuvre m'a toujours communiquée : celle d'une splendide construction sonore et rythmique, hardie, fougueuse et passionnée, prenant une haute place dans la série déjà impressionnante des œuvres de toute forme et de tout genre dues au même compositeur ».

À ceux qui ont reproché à Boulez sa froideur mathématique, on peut opposer qu'une solide structure théorique ne nuit pas forcément à l'expression d'une émotion.



travaux d'Olivier Messiaen dont il est l'élève au Conservatoire de Paris, ne tardera pas à naître.

En 1946, nommé directeur de la musique de scène de la compagnie Renaud-Barrault, il compose ses premières œuvres : une *Sonatine* pour flûte et piano, la *Première Sonate* pour piano, et *Visage nuptial*, pour soprano, alto et orchestre de chambre, sur des poèmes de René Char.

Une démonstration musicale

Sa *Troisième Sonate* pour piano, en 1957, constituera un tournant dans l'histoire de la musique contemporaine au même titre que l'œuvre de Stockhausen intitulée *Klavierstück XI*. Boulez y offre à l'interprète plusieurs possibilités de lecture (voir encadré). Il lutte donc contre le concept d'œuvre unique comme Vasarely l'a fait en peinture. La correspondance avec l'art pictural ne s'arrête pas là. Pierre Boulez s'est beaucoup intéressé aux réalisations du peintre Klee et retenait dans ces dernières :

- *une capacité à réduire les éléments dont nous disposons dans n'importe quel langage à leur principe même, c'est-à-dire, et c'est ce qui est si important, quelle que soit la complexité d'un langage, à en comprendre d'abord le principe, à être capable de le réduire à des principes extrêmement simples.*
- *une capacité à tirer à partir d'un unique sujet des conséquences multiples, qui prolifèrent, bref parvenir à une cascade, à un arbre de conséquences.*

Le mathématicien aura reconnu dans le premier principe la réduction aux axiomes élémentaires et dans le deuxième le concept de raisonnement hypothético-déductif transmis par la mathématique grecque. Boulez envisagea d'ailleurs de donner à la première *Structure pour deux pianos* (composée en 1951) le titre d'un célèbre tableau de Klee : *A la limite du Pays Fertile*. La raison ? De même que Klee a construit ce tableau grâce à très peu d'axiomes, essentiellement un algo-

Eléments de discographie

Pierre Boulez, *Première Sonate pour piano* (1946), *Deuxième Sonate pour piano* (1947-1948), *Troisième Sonate pour piano* (1955-1957). Par Herbert Henck, coproduction avec Radio Bremen, 1985.

Boulez dirige Boulez, *Explosante fixe,* Pierre Boulez (Compositeur), Pierre Boulez (Chef d'orchestre), Pierre-Andre Valade (Chef d'orchestre), Sophie Cherrier (Interprète), Andrew Gerzso (Interprète), Emmanuelle Ophele (Interprète). Deutsche Grammophon

rithme d'ordonnancement de segments de droites horizontaux et obliques, Boulez a fait reposer sa structure musicale sur une clé très simple. Cet esprit se perfectionnera au fil de l'œuvre de Boulez. Pour que chaque composition musicale soit ouverte, c'est-à-dire soit interprétée individuellement par chaque exécutant, il définit une structure musicale en prédéfinissant une série d'axiomes (série de notes caractérisées par leurs paramètres, intensité, attaque, durée, ...). Ensuite, sa partition peut être perçue comme une démonstration, c'est-à-dire un enchaînement d'axiomes, avec certains choix dans le déroulement. Cette liberté relative d'exécution – Boulez parle de hasard dirigé – permet à la fois un jeu à multiples possibilités et une interprétation digne de ce nom. Boulez a expliqué sa démarche en la comparant à la situation d'une personne baguenaudant dans un labyrinthe ou dans une ville. On la visite et on choisit ses propres directions, sa propre démarche, mais il est bien évident que pour découvrir une ville, il faut un plan précis et certaines règles de circulation. C'est l'établissement de ces règles qui résulte du génie du créateur.

La consécration internationale

Cette recherche constante et intelligente sur l'équilibre entre contraintes et liberté le fera rapidement accéder à la consécration internationale.

Après Renaud-Barrault, il enseigne à Darmstadt (1959), à Bâle (1961), à Harvard (1962),... et assure de nombreuses directions d'orchestre : au Théâtre des Champs Elysées, à Cleveland, à l'Opéra de Paris, à Francfort, à la B.B.C., à la tête de l'Orchestre Philarmonique de New York succédant ainsi à Léonard Bernstein.

C'est en 1976 que sa carrière prend sa véritable dimension, puisque cette année-là, il dirige la Tétralogie pour le centenaire du Festival de Bayreuth (avec une mise en scène de Patrice Chéreau), prend la direction de l'IRCAM (Institut de Recherches et de Coordination Acoustique/Musique, à Paris qui ouvrira en 1977), devient Président de l'Ensemble Intercontemporain et, pour clore le tout, est nommé Professeur au Collège de France.

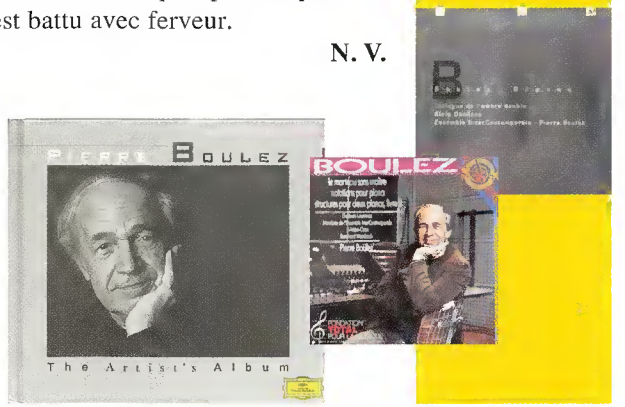
C'est encore à lui que nous devons la Cité de la Musique, pour laquelle il s'est battu avec ferveur.

N. V.

Le Marteau sans Maître,
Ensemble Inter-Contemporain (Orchestre),
P. Boulez (Compositeur),
B. Wambach (Interprète).
IRCAM

Répons,
Pierre Boulez (Compositeur),
Pierre Boulez (Chef d'orchestre),
Vincent Bauer (Interprète),
Florent Boffard (Interprète),
Frederique Cambreling (Interprète),
Michel Cerutti (Interprète),
Daniel Ciampolini (Interprète),
Alain Damiens (Interprète).

The Artist's Album,
Boulez.
Deutsche Grammophon.



par Norbert Verdier

Des matrices pour influencer le hasard

Dans sa correspondance avec John Cage, Pierre Boulez expose ses réflexions sur la musique dodécaphonique, où l'on retrouve de nombreux concepts mathématiques. Les deux musiciens utilisent le hasard dans leurs compositions, mais chacun à sa manière.

Pierre Boulez
D. R.

On a souvent opposé à Pierre Boulez la musique du compositeur américain John Cage, disparu il y a quelques années. Ce dernier a beaucoup utilisé dans ses compositions l'irruption aléatoire de bruits divers (trafic de New York, par exemple). À la différence de Boulez, il prônait un hasard non dirigé. Ces deux compositeurs ont échangé une correspondance fructueuse sur leur art.

Ainsi, dans une de ses lettres à Cage, Boulez le théoricien développe ses travaux sur la série dodécaphonique, thème de douze notes toutes distinctes do, do#, ré, ré#, mi, fa, fa#, sol,sol#, la, la#, si, qu'on peut modéliser par l'ensemble $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$. Avant Boulez, c'est Arnold Schœnberg qui en formalise l'utilisation musicale dans les années 1920, en décrivant le groupe des 48 transformations qu'on peut faire subir à une telle série. C'est ainsi que Boulez, puis d'autres, vont généraliser la musique sérielle, c'est-à-dire composée à l'aide de séries, des années 50 jusqu'à aujourd'hui. L'étude de cette théorie musicale sous-entend de nombreux concepts mathématiques, comme celui de permutation, transposition, symétrie, pour lesquels Pierre Boulez ne se privera pas d'utiliser les notations adéquates, comme par exemple la notation matricielle.

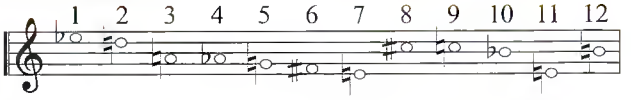
On peut remarquer que les deux matrices A et B qu'il définit sont symétriques, c'est-à-dire que dans chacune de ses matrices il y a une symétrie par rapport à la diagonale principale.

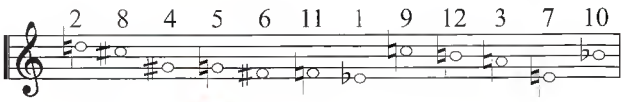
Boulez définit sa composition par l'algorithme suivant : notons $A(i, j)$ l'élément situé à la $i$ème ligne et à la $j$ème colonne. De même pour $B(i, j)$. Ayant choisi l'initialisation à savoir l'indice i, faire :

Pour j allant de 1 à 12
Faire
Pour k allant de 1 à 12
Faire A[B(i, j), k]

Cet algorithme offre une liberté pour

Série originale





etc.

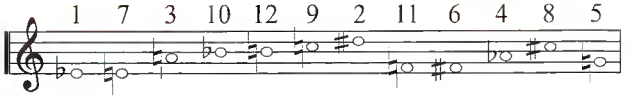
A

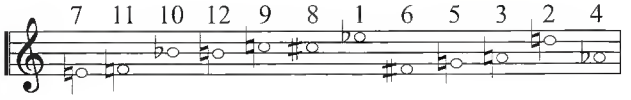
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	8	4	5	6	11	1	9	12	3	7	10
3	4	1	2	8	9	10	5	6	7	12	11
4	5	2	8	9	12	3	6	11	1	10	7
5	6	8	9	12	10	4	11	7	2	3	1
6	11	9	12	10	4	5	7	1	8	4	2
7	1	10	3	4	5	11	2	8	12	6	9
8	9	5	6	11	7	2	12	10	4	1	3
9	12	6	11	7	1	8	10	3	5	2	4
10	3	7	1	2	8	12	4	5	11	9	6
11	7	12	10	3	4	6	1	2	9	5	8
12	10	11	7	1	2	9	3	4	6	8	5

B

1	7	3	10	12	9	2	11	6	4	8	5
7	11	10	12	9	8	1	6	5	3	2	4
3	10	1	7	11	6	4	12	9	2	5	8
10	12	7	11	6	5	3	9	8	1	4	2
12	9	11	6	5	4	10	8	2	7	3	1
9	8	6	5	4	3	12	2	1	11	10	7
2	1	4	3	10	12	8	7	11	5	9	6
11	6	12	9	8	2	7	5	4	10	1	3
6	5	9	8	2	1	11	4	3	12	7	10
4	3	2	1	7	11	5	10	12	8	6	9
8	2	5	4	3	10	9	1	7	6	12	11
5	4	8	2	1	7	6	3	10	6	11	12

Série renversée





etc.

l'interprète (en fait le choix de l'indice initial) mais sa structure même délimite un carcan assurant le maintien du sens.

Nous n'avons qu'évoqué la première partie de la lettre de Boulez. C'est une première approche de sa composition. La suite se complique car à chaque note peut être attribuée un ensemble de trois paramètres (intensité, attaque et durée). Ainsi les matrices considérées ont pour éléments des notes, elles-mêmes à trois paramètres.

On rejoint bien là les préoccupations permanentes de Boulez. On a déjà vu sa métaphore liant sa musique à une promenade dans une ville selon certaines règles. Il compare également fréquemment sa musique aux mobiles conçus par le sculpteur Calder. L'objet reste l'objet même si une légère brise le caresse. Boulez concentra ses idées sur ces questions dans un article paru dans *Nouvelle Nouvelle Revue Française* sous le titre *Aléa*. Ce mot devait rencontrer le succès puisqu'il finit par désigner la musique produite sur ces concepts. La musique aléatoire a donc été engendrée par la *Troisième Sonate* et par le *Klavierstück XI* de Stockhausen.

Cependant Boulez reprocha à la musique de Stockhausen son caractère trop vaste et trop mécanique. Quant à Cage, on pourrait qualifier sa musique de musique très (trop?) aléatoire. Boulez travaille sur un hasard modélisé alors que Cage, pourtant très ami avec Boulez, évoque un hasard ni maîtrisé ni maîtrisable. Au-delà de ces querelles de spécialistes, on doit à Pierre Boulez d'avoir accueilli en France des créations mondiales, de Bruckner ou d'Alban Berg, par exemple.

Qui sait si elles auraient existé sans lui ?

N. V.

BIBLIOGRAPHIE

- *Pierre Boulez et l'IRCAM*, **Tome 3,** 1989-Février 1991, Publications du Centre Georges Pompidou, 1991.
- *Rencontre avec Pierre Boulez,* par **Antoine Goléa,** Julliard, 1958.
- *Pierre Boulez par volonté et par hasard,* entretiens avec **Célestin Deliège,** Editions du seuil, 1975.
- *Pierre Boulez,* par **Dominique Jameux,** Fayard / S.A.C.E.M., 1984.
- *Correspondance,* par **Pierre Boulez / John Cage,** Christian Bougeois Editeur.
- *Petite Histoire de la musique,* par **Norbert Dufourcq,** édition revue et augmentée par **Catherine Michaud-Pradeilles,** Larousse, 1988.
- *Le Pays Fertile,* par **Pierre Boulez,** Gallimard, 1990.
- *Vingt ans de musique contemporaine, tome II, de Boulez à l'inconnu* , **Stakline,** collection Ressources, 1981.

par Norbert Verdier

Iannis Xenakis

Depuis les temps les plus reculés, mathématiques et musique ont été intimement liées. Mais il a fallu attendre le compositeur grec Iannis Xenakis pour que cette parenté soit prise en compte dans l'art de composer.
S'il a su triompher de la technique, Xenakis avoue néanmoins que personne n'a encore trouvé l'équation du sens artistique.

Iannis Xenakis

Certaines formes extraites de domaines scientifiques ont entre elles des analogies susceptibles d'appréhender les domaines artistiques, sous un angle novateur.

Après de solides études théoriques à l'École Polytechnique d'Athènes, Iannis Xenakis s'est partagé entre des études musicales qu'il a poursuivies à Paris sous la direction d'Olivier Messiaen et des activités architecturales. Pendant douze ans, il a été collaborateur de Le Corbusier, ce qui l'a amené à participer à d'importants travaux d'architecture et d'urbanisme comme la création du pavillon Philips à l'exposition 1958 à Bruxelles, l'élaboration du Couvent de la Tourette, ou celle d'Unités d'habitation à Chandigarh (Inde).
Il s'est ensuite consacré à la composition musicale. Mais il ne reniera pas ses premières amours, et s'attachera en particulier à créer des spectacles – les polytopes – où l'esthétique visuelle se marie avec l'environnement sonore.
Son œuvre artistique est doublée d'une œuvre universitaire puisqu'il a soutenu en 1979 une thèse de doctorat en Sorbonne. Iannis Xenakis défendait le point de vue selon lequel certaines figures, certaines formes extraites de domaines scientifiques (logique, mathématique, physique, chimie…) ont entre elles des analogies, des similitudes, susceptibles d'appréhender d'autres domaines, en particulier les domaines artistiques, sous un angle novateur. Il soutient l'idée qu'une sorte de morphologie générale permettrait d'étudier de nombreuses spécialités grâce aux connexions qui interagissent entre elles.

La science du nombre rapportée au son

Jean de Garlande écrivait déjà en 1275 : « La musique est la science du nombre rapportée au son ». En ce qui concerne la composition musicale, Xenakis explique dans un entretien avec Monique Sicart : « Les musiciens ont utilisé la théorie des groupes de manière empirique bien avant que les mathématiciens l'aient formulée ! Par exemple, dans l'harmonie classique,

RÈGLES CLASSIQUES ET LIBERTÉS

Deux rencontres, deux visions différentes. Première rencontre : Olivier Messiaen, qui a vivement encouragé Xenakis à suivre la voie qu'il avait choisie. Deuxième rencontre : Arthur Honnegger, qui n'admit jamais la façon qu'il avait de prendre des libertés avec les "canons" de la beauté musicale. Ainsi, en harmonie classique, un intervalle d'une octave ne doit pas succéder à un autre. De même pour des intervalles d'une quinte "juste" (trois tons et demi).
– "Là, vous avez des quintes parallèles, des octaves parallèles, cela ne doit pas exister !
– Je sais, mais j'aime ça.
– Ce n'est pas de la musique ! Peut-être les trois premières mesures, et encore... !

on enseigne les quatre formes que peut prendre la mélodie : forme droite, forme rétrograde, forme des intervalles inversés, et forme rétrograde des intervalles inversés. Ces quatre formes sont les éléments d'un groupe de Klein utilisé par Bach dans *Le clavecin bien tempéré* ».

Autre exemple : l'ensemble des hauteurs d'une gamme classique forme un groupe pour les lois de transposition musicale.

Xénakis utilise, quant à lui, sciemment la théorie des groupes dans sa « musique symbolique ». Il décrit des « êtres sonores » possèdant des caractères intemporels et ordonnables, qu'il munit d'une structure de groupe, voire d'espace vectoriel.

« Dans Herma, pour piano solo, issue de ces théories, il existe quatre ensembles fondamentaux qui créent entre eux des fonctions booléennes, à l'aide des trois opérations logiques de base : la réunion, l'intersection, la négation, et de deux relations fondamentales, l'inclusion et l'égalité », explique Xenakis dans *Musique, architecture* (Casterman).

Science et évaluation artistique

Mais Xénakis n'adhèrait pas pour autant à la « musique sérielle » de Schœnberg (reposant sur la division de l'octave en douze intervalles rigoureusement identiques) qu'il accuse de n'être qu'une construction scientifique

dénuée de relation suffisante avec l'évaluation artistique. C'est pour cette même raison qu'il prenait ses distances avec la composition « automatique ». L'étape « humaine » lui semblait nécessaire.

Pour Xénakis, la création musicale ne doit pas seulement être perçue comme l'itération d'un élément unité suivant telle ou telle loi, mais globalement : on appréhende les sons dans leur ensemble en tenant compte des liens (découlant de lois de variations continues) qui les unissent. Aussi, déclare-t-il très explicitement : « Nous ne désirons pas construire un édifice de sons complexes en utilisant des éléments unités discontinus… nous désirons construire des sons avec des variations continues qui ne soient pas faites d'éléments unités. »

La musique stochastique

C'est avec la musique stochastique, créée dès 1955, que Xenakis mettra en application cette théorie en introduisant la théorie des probabilités dans la composition musicale.

LA MUSIQUE À L'ORIGINE DES MATHÉMATIQUES ?

Lors de la soutenance de la thèse de Xenakis en 1979, un dialogue s'est instauré entre Xenakis le musicien et Michel Serres, le philosophe des sciences. Extraits.

Michel Serres :
Quelqu'un avant vous a eu l'idée d'une morphologie générale mais seulement en biologie [...]. *Actuellement, le mathématicien René Thom travaille sur cette morphologie générale, de sorte que votre idée de morphogénèse rencontre une partie de la science en marche. Comme d'habitude, le musicien était en avance.* [...]. *Vous aviez une armature mathématique pour commencer le projet d'une morphologie de ce genre ?*

I. X. : Oh ! pas du tout, non, ...

M. S. : *Et en topologie ?*

I. X. : La topologie ? De quel point de vue ? Parce que si la topologie est peut-être la science la plus fondamentale sur le plan mathématique ...

M. S. : *Sur le plan des formes, certainement.*

I. X. : Sur le plan des formes, mais aussi de la pensée philosophique des mathématiques, vous ne croyez pas ? C'est le problème de la continuité, de la discontinuité, des contacts, de la connexité...

M. S. : *Des bords* [...] *Sur votre tableau des correspondances entre les développements de la musique et des mathématiques, je suis d'accord avec vous, je voudrais seulement le compléter. Losque vous dites qu'avant notre ère, on avait eu quelque chose comme l'analyse comparée des longueurs, des cordes et des hauteurs des sons, vous pensez à Pythagore, je suppose, et à l'école pythagoricienne. On pense de plus en plus actuellement qu'il n'y a pas eu d'analogie entre l'invention des premiers intervalles musicaux et l'invention de la mathématique, mais cause et conséquence, c'est-à-dire que c'est par la musique qu'on a pu avoir l'idée de l'ensemble des nombres naturels mais aussi des rapports et des fractions. La musique aurait été la matrice de l'invention mathématique.*

LES MATHÉMATIQUES STOCHASTIQUES

Soit n états possibles, $S_1, S_2, \ldots S_n$, d'un certain système et une suite d'instants $t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}$.
On suppose qu'à chacun de ces instants le système soit dans un seul des états cités précédemment et que $p_{i,j}$ désigne la probabilité de trouver le système dans l'état S_j à l'instant t_k sachant qu'à l'instant t_{k-1} le système était dans l'état S_i.
On suppose que les probabilités de passage $p_{i,j}$ ne dépendent pas de l'instant t_k donc sont indépendantes de l'indice k.

On résume en disant qu'on a à faire à une chaîne de Markov homogène à un nombre fini d'états. Chaîne qu'on représente par une matrice des probabilités de passage :
$P = (p_{i,j})_{(i,j) \in \{1,2,\ldots,n\}^2}$.

Il est clair que $p_{i,j} \geqslant 0$ pour tout couple (i, j) et que pour tout indice i,

$$\sum_{j=1}^{n} p_{i,j} = 1.$$

Une matrice vérifiant ces deux conditions est appelée matrice stochastique. Ainsi, toute chaîne de Markov homogène à un nombre fini d'états est représentée par une matrice stochastique; réciproquement, une matrice stochastique représente une telle chaîne de Markov.

Cette simple correspondance entre chaîne de Markov et matrice stochastique constitue le fondement de la méthode matricielle d'étude de la théorie de Markov élémentaire, théorie essentiellement développée par Kolmogorov.
Cette théorie a de nombreuses applications dans tous les domaines faisant intervenir des chaînes d'événements liés entre eux par des liens probabilistes comme l'économie. Une application originale de la théorie de Markov à la musique est due à Xenakis.

N.V.

Cette musique repose sur la théorie des chaînes de Markov, qui date de 1905 mais qui ne s'est véritablement déployée que quelques années plus tard (pendant la deuxième guerre mondiale) à la suite de travaux complémentaires de Fréchet et de Kolmogorov.
Considérons une suite finie d'événements notés A, B, C, ... On suppose que l'événement B apparaisse après l'événement A avec une certaine probabilité, et ainsi de suite pour les autres successions d'événements. Pour être plus clair, si l'on réduit l'événement A à « la lettre A apparaît dans un texte donné », on conçoit aisément que les événements sont liés entre eux par des liens de type probabiliste. Par exemple, la probabilité que B apparaisse après A est assez forte alors que la probabilité que la lettre W apparaisse après la lettre X est assez faible ! Bref, dans cette théorie les événements ne sont pas perçues isolément mais sont pris dans leur ensemble en considérant les liens (probabilistes) qui les cimentent.
Cette liaison probabiliste ou stochastique apparaît ainsi comme une sorte de mémoire intérieure à la chaîne des événements. Xenakis a particularisé cette notion de liaison stochastique de type marcovien grâce aux probabilités

les plus avancées (loi de Poisson, loi exponentielle, loi normale uniforme, processus de Wiener-Lévy, loi de Student, loi du X^2 avec n degrés de liberté, ...) afin de l'appliquer aux divers paramètres du son. Il a appelé cette nouvelle forme musicale, reposant sur des notions de probabilité pointues, « musique stochastique markovienne ».

Au-delà de l'appellation qui peut paraître quelque peu repoussante, pour se rendre compte de ce que cela a pu produire, il convient d'écouter des œuvres bâties sur cette théorie : citons « Analogique A », pour trois violons, trois violoncelles et trois contrebasses, composée en 1958 mais également « Analogique B » produite en 1959.

Musique et ordinateur

Qui dit calcul (des probabilités) dit souvent utilisation de l'ordinateur. Mais la première mission demandée à l'ordinateur fut une simple aide à la composition classique.

Jacques Barraud, alors chef du service informatique à Shell, raconte comment Xenakis lui fut présenté par un ami : « Reconnaissons-le, le compositeur en question était un gêneur. Il fallait le recevoir poliment, mais sans perdre de temps. Heureusement, il nous demandait un service relativement simple : l'introduire auprès de personnalités d'IBM pour qu'il obtienne l'autorisation de se servir du monument de l'époque, l'ordinateur 7090 ».

Cet ordinateur servira aux premiers programmes de composition de musique instrumentale. Plus tard, Xenakis a créé le CeMaMu, CEntre de MAthématiques MUsicales, qui fabriqua un appareil sur le même principe : « On dessine sur une table, et l'on perçoit immédiatement des sons, sans passer par une phase d'écriture de notes sur une portée ».

La C.A.O. (composition assistée par ordinateur) allait faire des émules, puis fut quelque peu éclipsée par la vogue de la synthèse numérique. Elle a retrouvé depuis quelques années un deuxième souffle, dans la mesure où elle bénéficie des progrès considérables des outils informatiques en matière de multimédia. Nombreux sont néanmoins encore les musiciens qui se refusent à utiliser de tels instruments. Ne parlons pas des programmes de composition automatique utilisant les probabilités qui furent ensuite conçus par l'équipe de Xenakis !

Toujours décrié par certains de ses pairs, difficile à comprendre pour nombre de mélomanes, Xénakis était encore à sa mort, le 4 février 2001, le compositeur contemporain le plus joué dans le monde.

N.V.

avec des compléments de

Gilles Cohen

DISCOGRAPHIE

Un certain nombre d'œuvres ont été citées dans l'article ; citons encore *Metastasis* (1953-1954), *Pithoprakta* (1955-1956), *Achorripsis* (1956-1957), *Orient-Occident* (1960), ...

BIBLIOGRAPHIE

- *Chercheurs ou artistes ?*, **Monique Sicart,** Autrement, 1995.
- *Xenakis, les Polytopes,* Balland, 1975.
- *L'appareil musical,* **Assayag** et **Cholleton,** Résonance.
- *Iannis Xenakis et la musique stochastique,* **La Revue Musicale,** Carnet Critique n° 257, 1963.
- *Iannis Xenakis, Musique, Architecture, Mutations-Orientations,* Casterman/ Poche, 1971.
- *Xenakis, L'Arc,* Cahier n°51, 1972.
- *Iannis Xenakis, Olivier Messiaen, Michel Ragon, Olwier Revault d'Alonnes, Michel Serres, Bernard Teyssèdre,* **Arts / Siences / Alliages,** Casterman,1979.

par Vincent Dequevauviller*

Bach mathématicien ?

« Bach mathématicien », « L'essence mathématique profonde des œuvres de Bach »... On trouve fréquemment ces affirmations dans les programmes de concerts ou les livrets de CD. Si certains experts s'accordent à reconnaître que la musique de Bach est inspirée par les mathématiques, ils le justifient de manière variée.

*Vincent Dequevauviller est chercheur au CNRS au sein du Laboratoire d'esthétique et sciences des arts (UMR 8592)

Une fugue est presque une démonstration mathématique, où l'on parle de sujet, d'argumentation, de résolution.

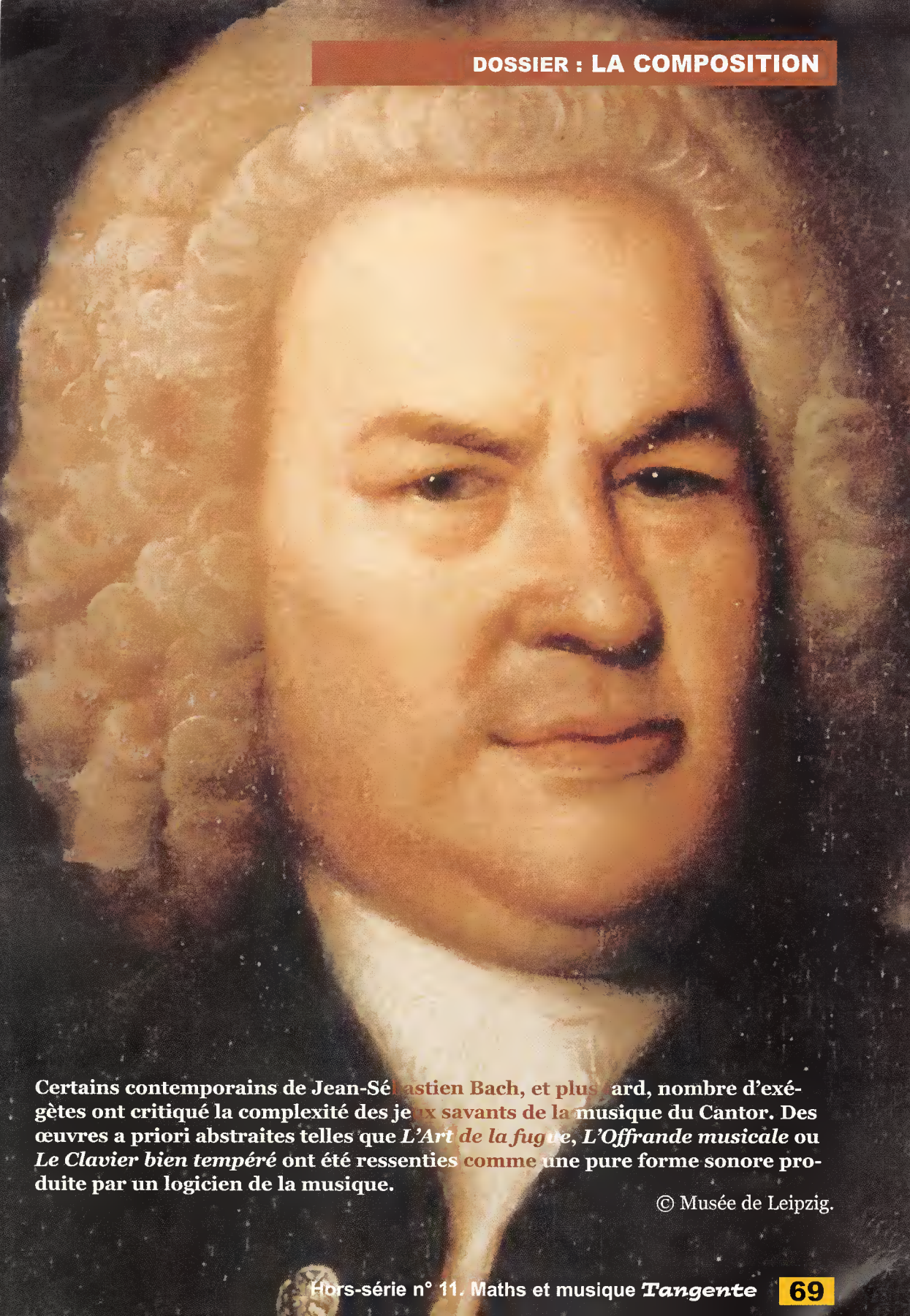
Contrairement à ce que l'on pourrait croire, nous ne possédons aucun document, aucun témoignage d'époque, qui pourrait attester que Bach, d'une façon ou d'une autre, ait fait usage dans ses œuvres de techniques à base mathématique, ni même qu'il y ait montré un quelconque intérêt. De tels témoignages existent pour Mozart, Scriabine, Bartók ou Berg, mais pas pour Bach.

Alors, pourquoi ces théories ? La raison tient à la nature particulière de la musique de Bach. Alors que les œuvres de ses contemporains se dévoilent facilement à l'analyse, celles de Bach présentent une grande quantité de détails curieux, en apparence inexplicables. Sans cesse, on est surpris par ses choix, qui semblent répondre à des nécessités mystérieuses. L'hypothèse « mathématique » est une tentative de comprendre ces nécessités. Mais comment procéder pour la valider ? Puisque les sources sont muettes, la seule solution est d'étudier attentivement les œuvres. Cette étude dure depuis plus d'un siècle, et s'est orientée dans plusieurs directions.

Une musique « savante »

Déjà à son époque, la musique de Bach était perçue comme complexe, déroutante. Même sans être capable d'en décortiquer la partition, quiconque a écouté l'*Offrande musicale* ou *L'art de la fugue* a saisi la dimension intellectuelle de ces œuvres, où Bach utilise de façon presque exclusive certaines techniques compositionnelles de haute virtuosité, qui s'apparentent à un « tour de force ».

Le genre du « canon » est l'archétype de cette conception musicale, où une partition est avant tout un réseau de figures abstraites, agencées suivant de savantes règles. Un bon exemple se trouve à la fin de *L'art de la fugue*, dont le dernier canon, écrit « par augmentation et en mouvement contraire », est



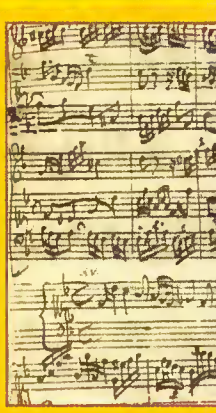
Certains contemporains de Jean-Sébastien Bach, et plus tard, nombre d'exégètes ont critiqué la complexité des jeux savants de la musique du Cantor. Des œuvres a priori abstraites telles que *L'Art de la fugue*, *L'Offrande musicale* ou *Le Clavier bien tempéré* ont été ressenties comme une pure forme sonore produite par un logicien de la musique.

© Musée de Leipzig.

peut-être le summum de la difficulté technique : cette pièce s'adresse autant à l'intelligence qu'à l'oreille. Le genre de la « fugue », qui joue un rôle central dans la musique de Bach, témoigne du même état d'esprit : en soi, une fugue est presque une « démonstration mathématique », où l'on parle de « sujet », d'« argumentation », de « résolution ».

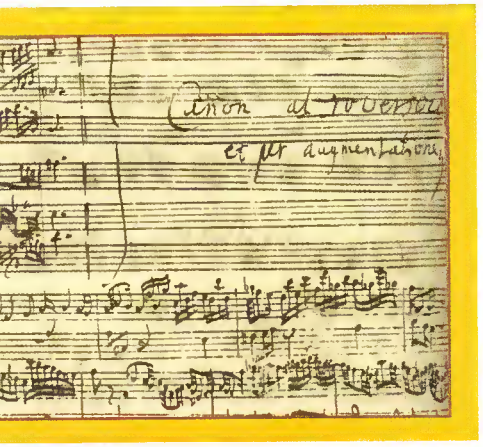
Le canon « par augmentation et en mouvement contraire » de L'art de la fugue

Comme dans n'importe quel canon, la première voix joue une mélodie (modèle) qui est reprise un peu plus loin par la 2e voix (imitation). Mais ici, l'imitation est jouée deux fois plus lentement que le modèle, c'est-à-dire que toutes les durées sont doublées : une croche devient une noire, une noire devient une blanche, etc. (« canon par augmentation »). En outre, tous les mouvements mélodiques sont inversés : un mouvement ascendant dans le modèle est joué descendant dans l'imitation, et vice-versa (« canon en mouvement contraire »).



Manuscrit original annoté par Bach

Cette conception musicale savante s'inscrit dans une tradition très ancienne, d'esprit corporatiste, où le musicien est avant tout un artisan, dépositaire d'un savoir « réservé » qui se transmet oralement de maître à disciple. Dans son célèbre portrait par Haussmann, Bach tient à la main une petite feuille de musique, où trois courtes mélodies sont destinées à composer un canon à six voix : mais il ne nous donne pas la solution, et laisse à ses collègues le soin de la découvrir. Le titre un peu ésotérique du *Clavier bien tempéré* rappelle que le propos de cette œuvre fut de montrer (démontrer ?) qu'il était possible de composer un morceau de musique à partir des douze notes de la gamme chromatique : gageure intellectuelle, défi d'artisan qui veut montrer à ses pairs ce dont il est capable. On pense à Pierre de Fermat, qui, au siècle précédent, envoyait à Wallis des « colles » mathématiques.



Finalement, cette attirance pour une musique *intellectuelle* suffirait presque à justifier l'équation Bach = mathématique. Les deux membres de l'équation ont en commun le goût du raisonnement abstrait, de la manipulation technique difficile.

Le XIX^{e} siècle a souvent réduit Bach à cet aspect. Dans l'esprit romantique, un compositeur est une sorte de « médium », régulièrement visité par l'inspiration qui lui dicte ses compositions dans un état « somnanbulesque » : une approche à l'opposé complet de Bach, qui, pour Schumann ou Chopin, est surtout un musicien pour musiciens, un maître savant qui connaît tous les « mystères » du métier et les utilise en pleine conscience.

A. Palamedesz.
Réunion musicale dans un intérieur
(1630).
© De Jonkheere

Des symboles chiffrés

Au début du siècle dernier, Albert Schweitzer proclama qu'on ne peut pas réduire Bach à cette dimension intellectuelle, pour fascinante qu'elle soit. Se penchant surtout sur les cantates

« Comme toute musique, la basse chiffrée n'a d'autre fin que la gloire de Dieu et la récréation de l'esprit ; autrement ce n'est plus une véritable musique, mais un bavardage et rabâchage diabolique. »

sacrées, il montra en quoi sa musique est aussi pleine de poésie, d'images sonores, qui traduisent en sons les idées exprimées par le texte.

Ces images utilisent parfois des chiffres. Par nature, la langue musicale fonctionne à l'aide de quantités discrètes (les notes, les mesures, etc.), et se prête bien à ces transpositions numériques. L'exemple le plus célèbre se trouve dans la *Passion selon Saint Matthieu*, au moment de la Cène. Quand Jésus annonce à ses disciples que l'un d'eux va le trahir, ceux-ci s'exclament en chœur : « Seigneur, est-ce moi ? ». Si l'on compte attentivement, Bach a écrit seulement onze fois le motif « Herr, bin ichs ? » : le traître se tait… Dans sa simplicité, le procédé peut presque sembler naïf. Mais il est surtout très efficace. Comme Dürer, qui, d'un coup de burin millimétrique, réussit à suggérer l'ombre et la lumière, Bach parvient, à l'aide d'une note (ou d'une note en moins) à ouvrir des champs d'interprétation insoupçonnés.

Parfois, le symbolisme est plus délicat à interpréter. Dans le chœur d'entrée de la *Passion selon Saint Jean*, grâce à de petites « vagues » de notes aux violons, et des notes répétées aux autres cordes, la musique semble miroiter comme une mer doucement agitée par le vent : c'est l'image de l'eau, si fréquente chez Bach. Mais quel sens donner à cette image à cet endroit ? Peut-être celui-ci : la pièce fait 153 mesures. 153 est le nombre de la pêche miraculeuse dans l'évangile de Jean. Bach veut-il, dès son commencement, placer l'œuvre sous le signe du « Christ pêcheur d'hommes » ?

Peut-être… On voit le danger de ce genre d'interprétation : comment en être sûr ? Comment même savoir si elles ont été voulues par Bach ? En révélant ces images et ces symboles, le livre de Schweitzer avait ouvert la voie à une analyse de type herméneutique, où il est toujours difficile de savoir où s'arrêter, de séparer le plausible de l'improbable.

C'est dans la même perspective qu'il faut placer la célèbre théorie proposée vers 1950 par Friedrich Smend. Selon lui, Bach aurait utilisé de façon insistante le nombre 14, qui est la somme des rangs d'ordre dans l'alphabet des lettres de son nom (B = 2, A = 1, C = 3, H = 8, et 2 + 1 + 3 + 8 = 14), et serait donc sa « signature chiffrée ». Cette technique de transposition numérique des lettres est effectivement attestée à l'époque. Depuis qu'elle a été formulée, la théorie de Smend est devenue un lieu commun de la littérature consacrée à Bach. Pourtant, elle souffre d'une « faiblesse congénitale ». En lui-même, le nombre 14 est faible, et il n'est pas nécessaire d'être statisticien pour comprendre qu'on le trouve un peu partout. Dès lors, comment prouver que Bach l'a sciemment utilisé en guise de signature ? Les adversaires de cette théorie ont eu beau jeu d'affirmer que certaines œuvres de Mozart ont été composées par Bach, puisqu'on y trouve le nombre 14…

En fin de compte, ces techniques d'illustration musicale à base de chiffres méritent-elles le nom de « mathématique » ? Que ce soit le « nombre 14 » ou les onze motifs du chœur des apôtres, les nombres sont utilisés comme des signes, supposés porteurs de sens, mais leurs propriétés numériques ne sont pas mises en jeu.

Des proportions

C'est peut-être en réaction aux dangers de la méthode herméneutique initiée par Schweitzer, que, dès 1922, Wilhelm

Le plan chiffré des Concertos Brandebourgeois

Le recueil contient six concertos, destinés à des instruments variés. On s'intéresse au nombre de mesures des pièces. Voici le total pour chaque concerto :

Concerto n°	1.	2.	3.	4.	5.	6.
Total	479	322	233	742	586	302

Observons les totaux des concertos n° 2 et n° 3 : non seulement ils sont complémentaires (322 et 233), mais ils utilisent exclusivement les chiffres 2 et 3, qui correspondent à leurs rangs d'ordre. À première vue, les autres nombres n'ont pas d'intérêt. Mais il faut savoir que le concerto n° 1 est spécial : après les trois mouvements habituels, Bach a ajouté quatre danses.

Comptons-les à part :

Concerto n°	1.	2.	3.	4.	5.	6.
3 mouvements	247	322	233	742	586	302
+						
4 danses	232					

Les trois premiers mouvements de ce concerto n° 1 ont 247 mesures : ce nombre est complémentaire des 742 mesures du concerto n° 4. Les quatre danses ont 232 mesures : on retrouve encore les chiffres 2 et 3 des concertos n° 2 et n° 3. Ces similitudes numériques très simples permettent d'obtenir la répartition d'ensemble du cycle. Il suffit d'associer les nombres de façon logique :

1° Les concertos n° 1 et n° 4 ont 247 + 742 = 989 mesures.

2° Puisque les danses ont 232 mesures, il est logique de les ajouter aux concertos n° 2 et 3 :
322 + 233 + 232 = 787 mesures.

3° Il reste les deux derniers concertos, dont les totaux n'ont pas d'intérêt en eux-mêmes, mais qui font 586 + 302 = 888 mesures.

Finalement, les 2664 mesures du cycle complet sont réparties suivant une formule simple en progression arithmétique : 787 + 888 + 989.

2664
787 = 322+ 233 + 232 (n° 2 + n° 3 + 4 danses)
888 = 586 + 302 (n° 5 + n° 6)
989 = 247 + 742 (n° 1 sauf les danses + n° 4)

En partageant le cycle en deux moitiés, on voit que les quantités de mesures sont disposées de façon symétrique. Les nombres-miroirs 247 et 742 sont en tête de chaque moitié (en quelque sorte, l'axe médian du cycle *retourne* le nombre 247 en 742). Les autres concertos sont associés par paires : n° 2 et n° 3 à gauche ; n° 5 et n° 6 à droite. Les danses ne déparent pas cette disposition logique, puisque, placées à la fin du concerto n° 1, elles s'enchaînent directement avec le couple qu'elles complètent.

Concerto n°	1.	2.	3.	4.	5.	6.
3 mouvements	247	322	233	742	586	302
+						
4 danses	232.					

Werker tentait de montrer que la musique de Bach était « avant tout » de l'ordre de l'abstraction architecturale. Son livre consacré au *Clavier bien tempéré* cherchait à mettre en valeur des principes de construction, en particulier des règles de symétrie. Pour les besoins de son étude, Werker était amené à comptabiliser certains paramètres, par exemple à compter les mesures pour montrer que tel morceau est exactement coupé en son milieu arithmétique.

Cette méthode a été régulièrement utilisée depuis. Elle correspond à une réalité indubitable de la musique de Bach. Il est indéniable que Bach utilise fréquemment des relations de proportions simples, dont l'égalité. Les 84 mesures du premier mouvement du premier *Concerto Brandebourgeois* sont exactement coupées en deux moitiés de 42 mesures par le retour du thème princi-

pal. Les 144 mesures du grand *Prélude en ut mineur* pour orgue BWV 546 sont exactement divisées en trois groupes égaux de 48 mesures : en matière de proportions, il est difficile de faire plus simple !

Il semblerait qu'on tienne là une piste prometteuse : ainsi, la musique de Bach serait bel et bien construite suivant un schème préétabli, à base de proportions numériques. Mais, à nouveau, l'œuvre de Bach fait de la résistance ! Si quelques pièces sont parfaitement régulières, d'autres montrent une absence totale de proportions. Par exemple, la *Fugue*, qui fait suite au *Prélude en ut mineur précité*, est en quatre parties de 58, 28, 34 et 39 mesures : il est difficile de faire plus irrégulier…

Les recherches consacrées à ces proportions ont toutes buté sur ce problème. Certains ont tenté de sauver la théorie, en cherchant des règles plus complexes, comme la proportion par « moyenne et extrême raison » (la section dorée). Jusqu'à ce jour, les résultats ne sont guère probants. Par nature, la proportion dorée, qui n'aboutit pas à des entiers, n'est pas bien adaptée au langage musical, qui fonctionne, on l'a dit, par quantités discrètes. Les résultats sont donc toujours approximatifs et peu convaincants.

Une méthode différente

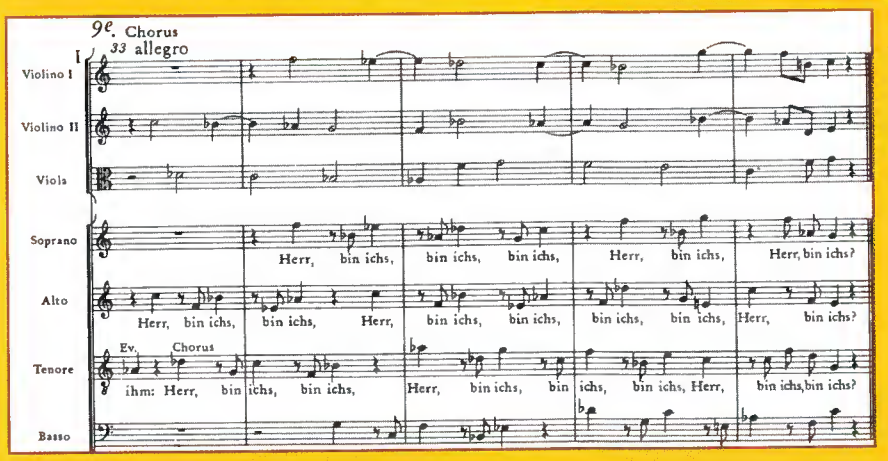
Ainsi, les pistes précédentes n'ont fourni que des résultats fragmentaires. Faut-il se résoudre à cette vision éclatée du corpus de Bach, où des logiques occasionnelles cohabiteraient sans souci d'un système général ? Le dernier encadré propose une analyse numérique globale du recueil des *Concertos Brandebourgeois*, suivant une méthode différente des précédentes. Selon cette analyse, il semblerait

que ce recueil célèbre ait bel et bien fait l'objet d'une planification numérique précise.

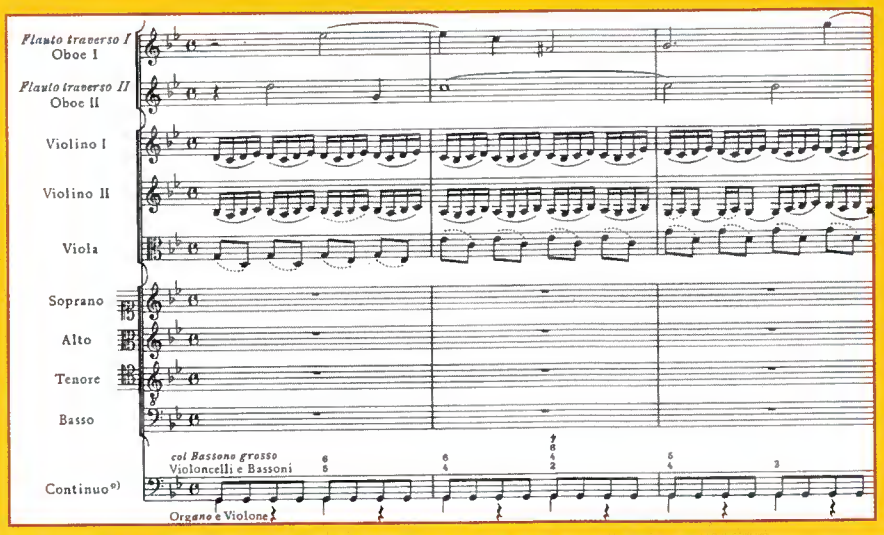
À grande échelle, cette planification montre une évidente recherche de proportion. Le total de mesures, 2664, est un multiple de 72 (c'est-à-dire $2^3 \times 3^2$), et offre donc de nombreuses possibilités de répartitions. Le plus simple serait de diviser ces 2664 mesures en trois groupes égaux de 888 mesures, comme les 144 mesures (un autre multiple de 72) du *Prélude* étaient divisées en trois groupes de 48 mesures. Mais Bach, sans doute pour obtenir des solutions plus variées, préfère « inégaliser » cette répartition, et travaille à partir d'une formule en progression arithmétique : 787 + 888 + 989.

C'est ici que réside la subtilité de son système. Pour répartir ces 787, 888 et 989 mesures, Bach abandonne la recherche de proportions et choisit les nombres en fonction de leurs caractéristiques « visuelles » : les 989 mesures sont divisées en 247 + 742, les 787 mesures en 232 + 233 + 322. Mais pourquoi les concertos n°5 et n°6

Chœur des disciples dans la Passion selon Saint Matthieu



Début de la Passion selon Saint Jean



utilisent-ils des nombres quelconques ? Sans doute parce que Bach veut conserver à son plan chiffré une part de mystère. Même le nombre 247 n'apparaît que si on isole les danses, qui sont donc la clef de cette architecture chiffrée. (La place manque pour approfondir ici cette analyse.)

Dans l'*Offrande musicale*, J.-S. Bach a écrit : « Quærendo invenietis » « Cherchez et vous trouverez ». On revient finalement à notre point de départ : la musique de Bach, y compris dans ses aspects les plus secrets, est une incitation à chercher, encore et encore, des raisons à la fascination qu'elle exerce.

V. D.

par Jacques Sélamé

3 minutes quatorze de bonheur

Créer une œuvre musicale en « traduisant » en harmonies les chiffres de l'expression d'un nombre en base 7, c'est le curieux pari qu'a réussi Jean-Philippe Fontanille, un compositeur de guitare entiché de mathématiques. Après π, $\sqrt{2}$ et e ont été les inspirateurs de morceaux à la richesse d'autant plus inépuisable que la suite des développements de ces nombres est infinie.

Pochette du disque de Jean-Philippe Fontanille pour l'Agence spatiale européenne.

De son propre aveu, Jean-Philippe Fontanille aurait pu faire partie de ces fameux cancres qui connaissent bien l'air de la table de multiplication sans jamais se souvenir des paroles !

Né en 1960 dans le département de la Vienne, issu d'un milieu rural, ce fils de boucher charcutier n'avait pas, étant petit, cette fameuse *bosse des maths* dont les anatomistes ne nous ont toujours pas révélé la place exacte sur le corps humain.

En guise de formation professionnelle Jean-Philippe a décroché un CAP d'aide-comptable. Les lauréats d'un tel diplôme sont certainement familiarisés avec les chiffres, mais ne sont guère entraînés sur la voie de la spéculation et de la recherche mathématique.

Ce parcours n'avait rien pour emballer la personnalité passionnée du jeune Jean-Philippe. Car, avoue-t-il, « mes deux passions ont toujours été la musique et les sciences ». À 19 ans, il est venu s'installer à Paris et, comme un personnage de roman, il s'est mis à travailler tout seul la guitare dans la petite chambre qu'il occupait. Autodidacte, il l'est aussi des sciences : peu de fanatiques ont été abonnés à autant de magazines et de revues scientifiques !

Pour gagner sa vie Jean-Philippe commence par enseigner la guitare, négligeant la formation de comptable qu'il avait suivie.

Mais il se met surtout à composer, par plaisir et professionnellement. C'est ainsi qu'il illustre musicalement des opérations de communication d'entreprises ou d'organismes institutionnels, et ne tarde pas à jouir d'un certain renom. Clin d'œil du destin, il a tra-

Jean-Philippe Fontanille

vaillé pour l'ordre des experts comptables, mais aussi pour la Mairie du XVI^{e} arrondissement de Paris ou encore pour quelques productions télévisées. On retrouve son nom au générique d'émissions portant sur la *connaissance du monde* et traitant de sujets comme les tribus d'Amazonie ou les derniers jours de Hong Kong colonie britannique.

En composant une musique pour l'Agence spatiale européenne (voir vignette), il montre encore que son goût va avant tout à l'épopée scientifique humaine, et qu'il rêve d'harmonie mathématique.

Du jazz à π

Car J.-P. Fontanille auteur compositeur n'est pas seulement un guitariste influencé par le jazz, Jimi Hendrix, John Mac Laughlin ou Paco de Lucia.

Il est aussi passionné par les rapports qui peuvent exister entre les mathématiques et la musique. Ses premières recherches *mathémusiciennes* portent sur $\sqrt{2}$ dont il n'a pas encore percé tous les mystères.

Mais c'est un autre des nombres magiques dont le nom rime avec l'histoire des mathématiques qui a titillé la guitare et l'inspiration de Jean-Philippe Fontanille.

Le rapport de la circonférence du cercle à son diamètre, ce nombre dont la quête infinie des décimales reste le Graal de mathématiciens, en un mot π a fourni au compositeur matière à une idée originale : composer une « harmonisation » reposant sur la suite de ses chiffres. Première contorsion mathématique : « Il fallait transformer le nombre en base 7, car, en musique la gamme ne comporte que sept degrés ».

NUMÉRATION DE BASE 7

Dans l'écriture **d'un nombre entier** N en base 7, $N = a_q \ldots a_2\, a_1\, a_0$, tous les chiffres sont compris entre 0 et 6. Le chiffre de droite a_0 représente les unités, le chiffre suivant a_1 les "septaines" ou paquets de 7, le chiffre suivant a_2 les paquets de 49 (ou 7^2), ..., le premier chiffre a_q les paquets de 7^q.
Ainsi, $N = a_q \,.\, 7^q + \ldots + a_2 \,.\, 7^2 + a_1 \,.\, 7 + a_0$.
a_0 est le reste de la division de N par 7.
a_1 est le reste de la division par 7 de $N_1 = (N - a_0) / 7$.
a_2 est le reste de la division par 7 de $N_2 = (N_1 - a_1) / 7$.
...
a_q est le reste de la division par 7 de $N_q = (N_{q-1} - a_{q-1}) / 7$.

De même, un réel R admet en base 7 une suite de chiffres après la virgule. Le principe en est le même que l'écriture décimale : pour obtenir R en base 7 avec k chiffres après la virgule, on écrit l'écriture en base 7 de la partie entière de 7^k. R, puis on place la virgule avant les k derniers chiffres. Vous trouverez en page suivante les 1500 premiers chiffres de π en base 7.

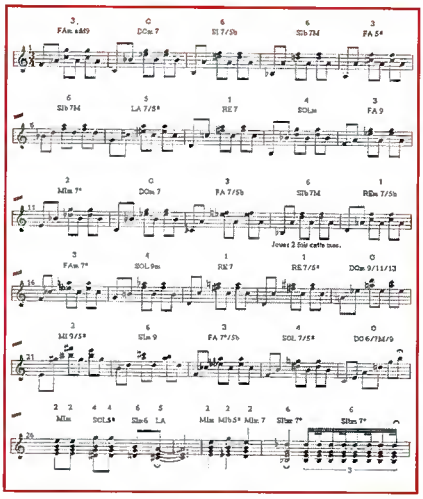
Aussitôt dit aussitôt fait, avec l'aide du mathématicien Jean-Paul Delahaye. Cette transformation entraîne un visage inattendu du nombre π qui, à la place du classique 3,14159... familier aux élèves, devient 3,0663... et se poursuit à l'infini.

Il n'y a plus qu'à substituer : zéro = do, 1 = ré, 2 = mi, et ainsi de suite. À ce stade, on n'a que « la mélodie » de π. Tout lecteur de ***Tangente***, même musicien débutant, peut la jouer sur son instrument.

L'étape suivante est « l'harmonisation ». Cela signifie que chaque chiffre ne sera plus seulement affecté à une note seule, mais à un accord complet dont cette note est la « fondamentale ». Ces accords peuvent être majeurs ou mineurs, dièses ou bémols, selon la tonalité utilisée.

Afin de donner au chiffre situé avant la virgule l'importance toute particulière qu'il mérite, la note qui lui est associée (un FA, correspondant au 3) détermine non seulement le premier accord du morceau, mais également la tonalité dans laquelle sont écrites les dix premières mesures (FA majeur). Ainsi, bien que les décimales continuent ensuite d'égrener les accords qui leur sont associés, elles restent néanmoins sous la tutelle de ce « 3 » dominateur qui, mystérieusement d'ailleurs, semble vouloir confirmer par lui-même son autorité en réapparaissant plus fréquemment que toute autre décimale tout au long de l'introduction.

Harmonisation de Pi (III) pour guitare acoustique.



La part de création

C'est au stade de l'harmonisation, en particulier, que l'initiative du compositeur intervient, et que se justifie la « signature » de l'œuvre.

Certaines décimales (on devrait les appeler « heptimales »), créant un contexte harmonique favorable, ont reçu du compositeur un développement plus long que celles impliquant une situation plus délicate à l'oreille, mais toujours dans le respect de l'accord qui leur était associé.

Ainsi la 44e décimale est traitée sur huit mesures, tandis les 17e et 18e décimales, arrivant dans un contexte harmonique plus défavorable, ne durent qu'un temps et demi. D'autres décimales, enfin, dont la suite donnait naturellement de belles successions d'accords, et qui auraient donc pu se prêter à d'agréables développements, sont restées volontairement « à l'état

3,0663651432036134110263402244652222664350
2065024015544321542643102516115456522000
0262243610330144323363101130410055004100
2412535211655210553625150303312424240260
1004363056453052633024132614021004500630
4010446652100035400040411133121523532350
4334540642646110025423321501311161114530
3050354144200052625431241461506463666120
5034062156651334265505312161414536020100
4631046524331422052601115466443004301420
0142342032404521441513013241462052516610
5244333450450323500152300303621644546106
5021346256345244351105645031110522332540
1403314616306305566400025124136353353130
5500314364221261503410163015234165116540
4562313163301340550004143332123320511040
1210402240503346501010222303303046551161 6
1250452506544564304213630542260560421640
3101224533463224115516324432200114053010
5605444210505633501042351630165624443050
6253363046253533144415643620525422651630
6016443512214133340311231201415424110210
0002660121216352350661533034035555326164
1500660122112023312140250433042514535340
5621255544000222315031426131123345316550
1523042065315342155413506624464022440330
2206566604234523124544240052305011615050
4621236560205514213132245340323242330460
6602241251231210500343431303142210352020
5615142226432640250016121225020615605260
0454440441130162660360110011514125322420
4352312201635156002310126545426525044330
3552061423265340155613046045065665640020
0460624002062143045456666043202241060150
2431634153565032205116043241445154616260
3206036063546345103363611603363361406640
4116046362151451124260140043555526463610
0215311006614460221625204302056040340330
0402216426023642060

Le développement de π en base 7.

brut » dans le souci de « coller » au plus près du matériau d'origine.
Car, on ne le rappellera jamais assez, Jean-Philippe Fontanille est d'abord et avant tout un musicien. Il compose « à la main » mais le logiciel Q-base utilisé par tous les compositeurs permet des transcriptions sans problèmes.
Ses ambitions ne visent pas une quelconque quadrature du cercle mais bien de composer une musique agréable à entendre quelle qu'en soit la source d'inspiration.
Les deux versions de l'harmonisation de π, l'une pour guitare acoustique, l'autre pour guitare électrique, sont avant tout des morceaux de musique ! L'auteur indique que « la version pour guitare acoustique est la plus rigoureuse ». Cela étant, le grand public se soucie-t-il des sources d'inspirations d'un compositeur ? Il existe aussi une version de π pour piano. Le tout donne un morceau agréable à l'oreille.

Un terrain encore vierge

Quand on sait que l'harmonisation de π (version 3) de Fontanille n'exploite que 65 décimales sur 71 mesures qui durent un peu moins de trois minutes (la prochaine version aura, on eût pu le deviner, π minutes), on imagine que l'auteur compositeur a encore un terrain encore vierge à défricher !
D'ailleurs Jean-Paul Delahaye le lui a fait remarquer : comme la suite de π est infinie, on pourrait en explorer indéfiniment toutes les possibilités. On tomberait alors sur la *Cinquième* de Beethoven ou sur des morceaux que le même Beethoven aurait pu composer et qu'il n'a jamais composé, ou encore découvrir des morceaux du répertoire classique *à l'envers* !
Mais il existe un vrai paradoxe à ce que les morceaux définitifs soient harmonieux. Toute composition musicale étant basée sur la répétition, l'alternance et le développement des thèmes, on imagine le problème : les développements de nombres irrationnels ne sont pas périodiques !
Pire, les décimales de π, et donc les notes qui leur sont associées, sont distribuées de façon quasi aléatoire !
Fontanille a essayé d'autres nombres irrationnels : $\sqrt{2}$, le nombre d'or. Ces deux-là sont algébriques, contrairement à π qui est transcendant.
« Force est de constater que de grandes disparités qualitatives apparaissent et caractérisent certains de ces nombres », proclame-t-il. Si l'on devait établir un classement des thèmes d'inspiration, $\sqrt{2}$ viendrait en premier, le nombre d'or en second, π prendrait la troisième place et e la quatrième : les « algébriques » avant les « transcendants » !
Le compositeur poursuit : « Un peu comme si certains d'entre eux acceptaient plus volontiers de se laisser har-

NOMBRES ALGÉBRIQUES ET NOMBRES TRANSCENDANTS

Un nombre est dit "algébrique" s'il est racine d'une équation polynômiale.
Ainsi, $\sqrt{2}$, racine du polynôme $X^2 - 2$, est algébrique.

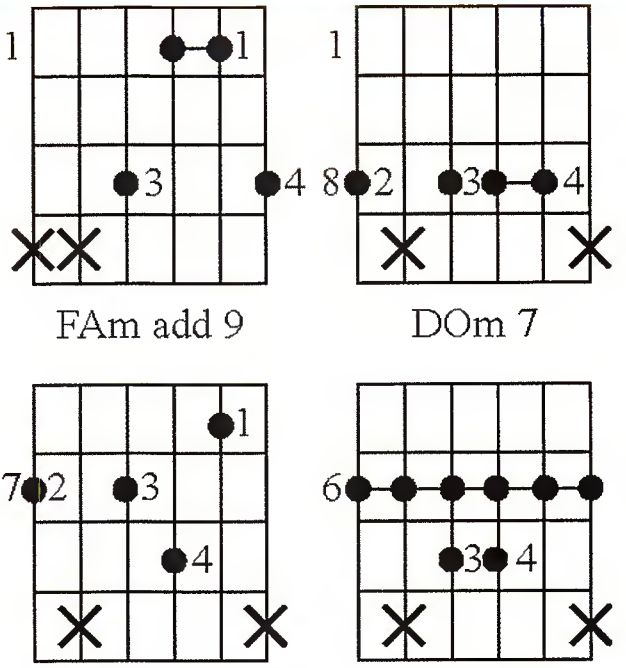
Le nombre d'or, $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, racine du polynôme $X^2 - X - 1$, est algébrique.

En revanche, on a montré que ni π, ni e (base du logarithme néperien) ne sont algébriques : ils sont "transcendants" !

moniser. Chaque nombre pourrait-il être porteur d'un message harmonique qui ferait de lui un peu plus qu'un simple outil quantitatif ? ».
Cette question ouvre une autre voie particulièrement prometteuse : car les qualités d'un nombre étant indépendantes de la base dans laquelle il est écrit, que deviendraient ces harmonisations si, au lieu de composer dans le système tonal traditionnel en utilisant la base 7, on utilisait la base 12 pour une composition dodécaphonique ?

Hommages prestigieux

Autant de questions qui ont attiré l'attention sur les travaux de Fontanille, aussi bien de la part du grand public que des scientifiques.
Le succès n'a pas attendu ***Tangente*** pour être au rendez-vous.
D'abord grâce à la « couverture » médiatique : France 3 lui a consacré, en novembre 1996, un reportage dans l'émission *Aléas*, Marie-Odile Monchicourt une de ses chroniques scientifiques sur France Inter, *Pour la Science* ou *Le Nouvel Observateur* des articles complets et élogieux.
Mais aussi par la réaction du public. Et quel public ! Le prix Nobel de physique Pierre-Gilles de Gennes lui écrit : « Je viens d'écouter votre harmonisation de π qui est très tonique, un grand plaisir ».
Le défunt mathématicien et « médaille Fields » René Thom, qui ne cachait pas son scepticisme a priori, se répandit en éloges : « Ce qui m'a le plus étonné c'est, sur un fond de neutralité " aléatoire ", l'émergence sporadique de thèmes très agréables qui, après quelques mesures, se débandent et disparaissent. Je sais qu'on a recherché des segments périodiques dans le développement décimal de π, mais je ne pensais pas qu'il en existât assez pour les rendre musicaux... »



Grilles d'accords (extrait).

Mais ces hommages unanimes, aussi satisfaisants et prestigieux soient-ils, ne pourraient le satisfaire s'il n'y avait aussi des lettres comme celle qui suit et dont Jean-Philippe Fontanille n'est pas peu fier : « Je ne suis qu'une vieille dame qui, autrefois, à l'école aimait les maths, ce monde défini par Ernesto Sabato comme un monde d'objets éternels et incorruptibles, comparables seulement à la musique... ». Et, en s'extasiant, sa correspondante le remercie pour l'instant de bonheur qu'il lui a procuré.
Car il est sûr que Fontanille ne prétend pas devenir un musicien pour initiés et donner des récitals devant un parterre de seuls scientifiques !

J·S.
avec des compléments de
Gilles Cohen.

par Alain Zalmanski

Schœnberg

le maître de la musique moderne

Jusqu'à la fin du XIX^e siècle, des règles d'harmonie très strictes et un cadre tonal furent imposés aux compositeurs. Si Liszt, Wagner ou Moussorgsky essayèrent de s'affranchir de ce carcan(*), c'est Arnold Schoenberg qui a forgé, en 1908, les outils de l'atonalité, avec en particulier l'abolition de la hiérarchie entre les douze notes de la gamme tempérée.

(*)
• Liszt, composa la *Bagatelle sans tonalité.*
• Wagner donna une dimension essentielle au chromatisme dans *Tristan et Isolde.*
• Moussorgsky retrouva la polytonalité et les modes anciens.

Né en 1874 à Vienne, Arnold Schoenberg pratiqua très tôt le violon et s'initia à la composition en « autodidacte ». Issu d'une tradition à la fois germanique et religieuse, l'art de Schoenberg ne peut être dissocié ni de sa foi d'origine hébraïque, ni de sa volonté à participer à un monde meilleur.

Dans la lignée des plus beaux chorals de Bach ou Mendelssohn, son contrepoint et ses canons seront des véritables démonstrations d'écriture musicale et son œuvre chorale, redécouverte au milieu du siècle dernier, constitue une novation fondamentale

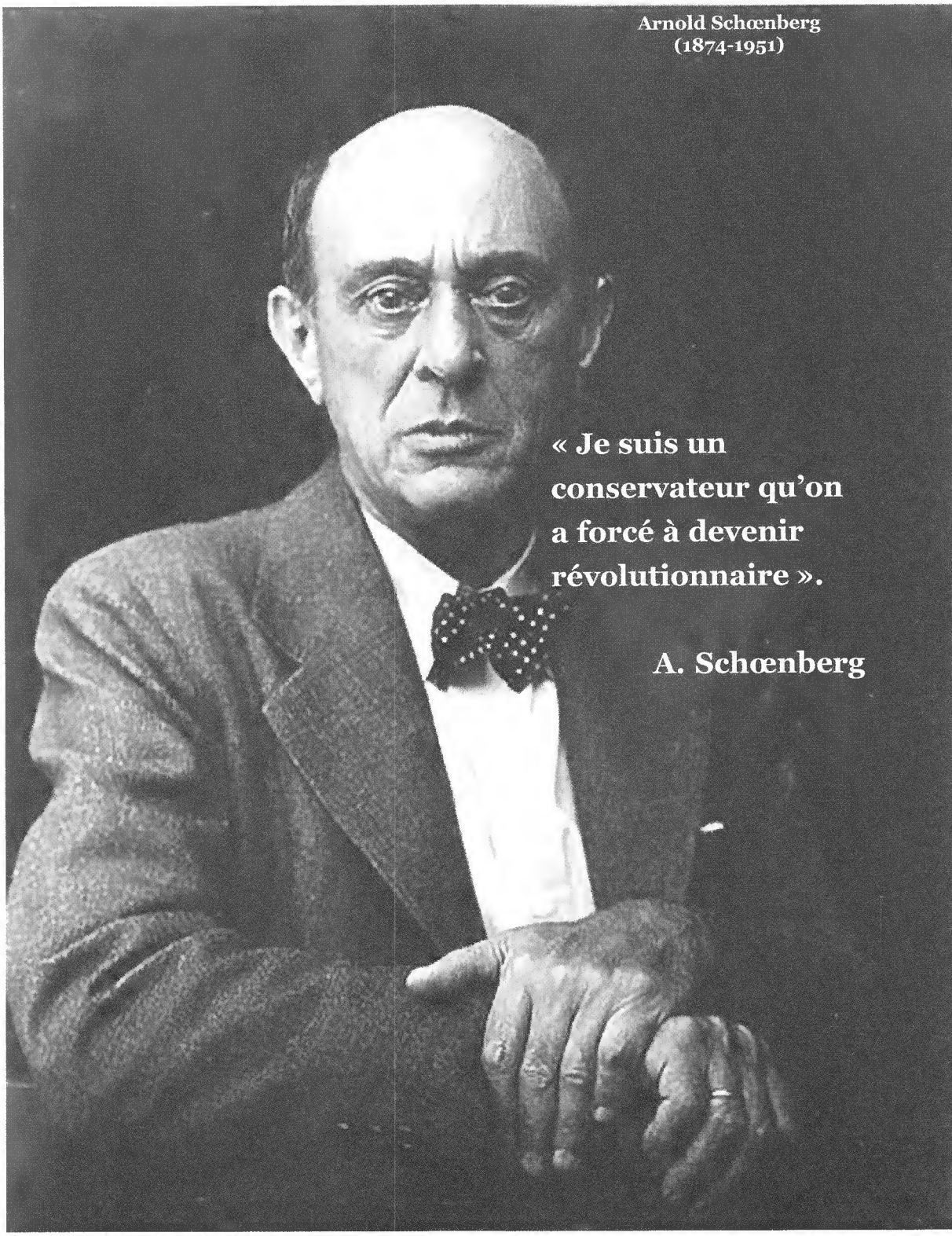
Les œuvres les plus marquantes de ses débuts sont *Friede auf Erden* (*Paix sur la terre*), chœur à 8 voix mixtes, a capella (1907), les *Gurrelieder* pour 5 solistes, chœur d'hommes à 3 voix, chœur mixte à 8 voix, récitant et orchestre (1900-1910), *La Nuit transfigurée* (1899), *Le Pierrot lunaire* (1912).

Parallèlement, c'est son œuvre d'enseignant à laquelle il restera très attaché, et ses très nombreux écrits théoriques (*Traité d'harmonie*, *Fonctions structurales de l'Harmonie*), qui lui apporteront la notoriété en Europe puis aux Etats-Unis où il sera obligé de s'exiler, en 1933.

Sa dernière œuvre, la cantate *Un survivant de Varsovie*, relate le calvaire des déportés menés à la mort. Créée en 1948, elle connaîtra un succès dû à la teneur du message autant qu'à sa qualité musicale. Elle constitue en effet une des compositions dodécaphoniques et sérielles les plus abordables de celui qui restera le précurseur et le maître de la musique moderne.

Musique atonale, dodécaphonique ou sérielle

La musique dodécaphonique utilise les douze hauteurs comprises entre deux


Arnold Schœnberg
(1874-1951)
« Je suis un conservateur qu'on a forcé à devenir révolutionnaire ».
A. Schœnberg

BIBLIOGRAPHIE

René Leibowitz, *Schoenberg.* Seuil (1984)

Guide de la musique sacrée. Fayard 1993

Bernard Parzycz, *Musique et mathématiques,* n°53 APMEP 1984

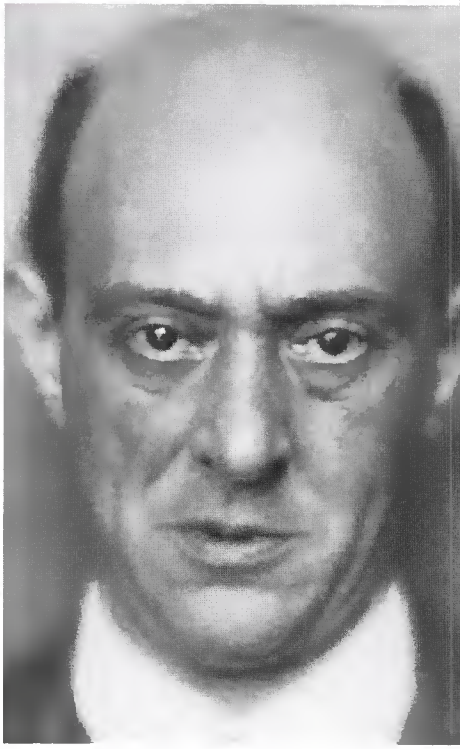
octaves, mais sans hiérarchie entre ces hauteurs. Elle abroge donc la notion de tonalité qui donnait une unité aux œuvres de la musique classique, avec un pivot tonal et des résolutions d'accords attendus, même si des modulations égaraient très légèrement et temporairement l'oreille. Cette atonalité adoptée totalement par Schoenberg, à partir de 1908, implique de nouvelles règles d'harmonisation, mathématisables, que Schoenberg s'attachera à résoudre.

Elle n'utilise évidemment pas « toutes » les hauteurs possibles, puisqu'on pourrait subdiviser les demi-tons en intervalles plus petits comme les quarts de tons, parfaitement perceptibles par une oreille humaine.

On constate que Schoenberg, en digne émule d'un Bach au contrepoint très chromatique, s'est effrayé d'une liberté totale vis-à-vis de la tonalité, liberté qu'il assimilait à un ferment d'anarchie. Si elle semble reposer sur une grande liberté, la musique de Schoenberg ne va donc pas jusqu'à s'affranchir de règles. Elle se fonde simplement sur de nouvelles règles. Schoenberg et ses élèves, Alban Berg (1885-1935) et Anton Webern (1883-1945) se sont

Timbre israélien à l'effigie d'Arnold Schœnberg.

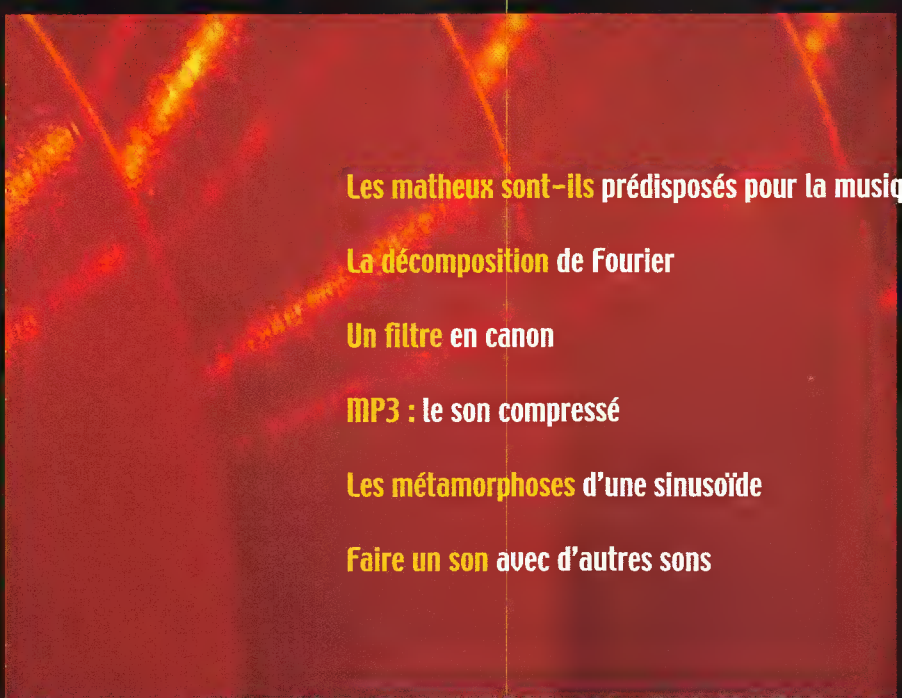
L'atonalité implique de nouvelles règles d'harmonisation, mathématisables, que Schoenberg s'est attacher à résoudre.



ainsi attachés à codifier de façon stricte cette nouvelle organisation des sonorités. Un exemple : aucune des 12 notes de la gamme considérée (do do# ré ré # mi fa fa # sol sol # la la # si en mode de do), prise dans un ordre fixé au départ, ne doit réapparaître tant que les onze autres n'ont pas été entendues. Cette musique, dite sérielle, se base sur un « thème » composé d'un certain nombre de notes, douze pour une partition dodécaphonique. Une partition sérielle obéit généralement à des contraintes de non-répétitions et de variations autour d'une ou plusieurs séries tout au long de l'œuvre. Ainsi on pourra renverser (symétrie) ou transposer (translation) les séries qualifiées d'originale ou de récurrentes. On pourra aussi étendre la notion de série aux rythmes et aux timbres, mais la formalisation en ce domaine est moins grande.

A. Z.

La technologie



Les matheux sont-ils prédisposés pour la musique ? p. 86

La décomposition de Fourier p. 90

Un filtre en canon p. 94

MP3 : le son compressé p. 96

Les métamorphoses d'une sinusoïde p. 100

Faire un son avec d'autres sons p. 104

Sous la musique, les maths ! Depuis le XIX^e siècle et Fourier, on sait que le son se décompose en sinusoïdes. De là, la technologie numérique peut entrer en scène pour reconstituer la musique à partir de nombres. Ainsi mathématisé, le son pourra se voir appliquer toutes sortes de transformations : filtres pour le modifier, distorsion pour l'améliorer, systèmes de codage numérique pour le compresser et lui permettre de voyager !

par Gilles Cohen

Les matheux sont-ils prédisposés pour la musique ?

Les matheux seraient prédisposés pour la musique ? Au-delà des relations étroites qui existent entre les deux disciplines, relations qui ont fait l'objet de nombreux ouvrages et justifient ce numéro hors-série, est-il possible de trouver une corrélation significative entre la pratique des mathématiques et celle de la musique ?

Chacun connaît des exemples de mathématiciens célèbres ayant noué avec la musique des relations qui vont au-delà du simple regard d'amateur, même éclairé. Alain Connes, mathématicien émérite mais aussi pianiste et fin mélomane nous a confié quelques éléments de réflexion à propos de sa relation avec ces deux disciplines (Cf. page 113).

D'autres mathématiciens sont aujourd'hui reconnus comme musiciens. Et souvent leurs travaux dans les deux disciplines interfèrent. Mais ces mathématiciens ont-ils été amenés à composer de la musique à la suite de leurs travaux mathématiques ou leur vocation est-elle indépendante ? Car la question posée en préambule doit, naturellement, exclure le mariage par nécessité. Ainsi, les compositeurs modernes, puisant souvent leurs constructions dans des techniques numériques sophistiquées, ont, par la force des choses, été amenés, pour une grande part d'entre eux, à s'intéresser aux mathématiques.

Mais si on prend le problème dans l'autre sens, on s'aperçoit que peu des musiciens classiques ont fait preuve d'une grande curiosité pour la discipline.

Une enquête auprès des mathématiciens

Mireille Chaleyat-Maurel, Laurent Mazliak et Didier Nordon ont eu, il y a quelques années, l'idée d'envoyer un questionnaire au nom de la société mathématique de France à plus de 1500 mathématiciens. 9 % d'entre eux y ont répondu.

Ce simple chiffre, pourtant important par rapport à la moyenne de retour d'un questionnaire de ce type, doit nous inciter à la prudence dans l'interprétation des résultats. Chacun sait que ceux qui prennent la peine de répondre sont souvent les interlocuteurs les plus motivés.

D'ailleurs, les premières réponses annoncent immédiatement la couleur. À la question « Vous considérez-vous comme mélomane ? », 79 % des correspondants

Le physicien Albert Einstein au violon et le mathématicien Adolf Hurwitz à la baguette. Photo prise en 1912 (Collection George Polya).

ont répondu « Oui ». 79 % encore déclarent avoir appris à jouer d'un instrument (une majorité le piano mais la flûte et le chant obtiennent 10 % chacun), et 42 % le pratiquent encore. Le genre musical préféré est à 84 % la musique classique.

Si 79 % d'une population se considère comme mélomane, cela signifie sans aucun doute que cette population est particulièrement sensible à la musique. Mais, comme disent les statisticiens, l'échantillonnnage est biaisé. On peut cependant remarquer que, même en admettant que toutes les personnes n'ayant pas répondu ne se considèrent pas comme mélomanes, il reste un taux de 7 % qui est probablement supérieur à la moyenne de la population française, quoique cette fois non significatif.

Pour tenter de lever cette hypothèque, une enquête a été lancée quelques mois plus tard auprès cette fois de 750 chimistes. Pourquoi des chimistes ? Parce qu' aux yeux des initiateurs de la consultation, ce sont aussi des scientifiques, mais peu suspects d'être influencés par la culture mathématique. Bon ! 5,5 % d'entre eux ont répondu, 67 % se considérent comme mélomanes, 53 % ont appris un instrument (seul les chiffres du piano sont significatifs), 36 % continuant à le pratiquer et 72 % écoutent surtout de la musique classique. Démonstration réussie ? À vous de juger. Vous trouverez en encadré quelques autres réponses comparées aux questions « statistiques » communes.

La conclusion, vous le constaterez, ne s'impose pas. Non pas que des différences n'apparaissent pas. La population de chimistes semble quelque peu moins musicienne que la population de mathématiciens, encore que les ordres de grandeur soient semblables (et impressionnent par leur distorsion avec la moyenne

79 % des mathématiciens consultés se considèrent comme mélomanes.

Alain Connes
© CNRS
Photothèque
Jérome Chatin

de la population). Mais on peut s'interroger sur le fait de savoir si ces chiffres ne traduisent pas une photographie de notre système éducatif, et, plus généralement de la corrélation entre un niveau d'études et les habitudes sociales de ceux qui y sont parvenus plutôt qu'une vraie relation entre les disciplines. Il est à noter que la majorité de l'échantillonnage avait plus de quarante ans, et rien ne dit que la même enquête menée aujourd'hui auprès d'une population de mathématiciens plus jeunes donne un résultat semblable.

Esthétique et mathématique

Si la corrélation entre mathématicien et musicien ne nous apparaît pas criante à l'examen de la pratique, cela ne signifie pas qu'elle doive être écartée quant on s'intéresse aux motivations et aux modes de pensée qui gouvernent les adeptes de ces deux disciplines. Chacun connaît l'importance de l'esthétique dans l'esprit du mathématicien, chacun garde présente à l'esprit la similitude des qualités nécessaires pour s'exprimer dans chacune des deux spécialités : qualités d'analyse, rigueur, goût pour l'exploration, aptitude à la construction, sens de la synthèse.

Le problème est qu'il est difficile de s'exprimer pleinement dans deux disciplines aussi exigeantes, aussi proches soient-elles, et les quelques exceptions rencontrées çà et là sont celles qui confirment la règle.

Alors, si vous êtes mathématicien, prenez-vous à rêver que, dans une autre vie, vous auriez pu épouser la carrière d'un grand compositeur ou interprète, et si vous êtes musicien, que vous auriez pu apposer, pour la postérité, votre nom à celui d'un théorème.

G. C.

Combien de disques possédez-vous de ? (Enquête SMF)

	Classique		Jazz		Variétés		Pop	
Moins de 10	3 %	7 %	53 %	43 %	51 %	33 %	75 %	73 %
11 à 50	25 %	24 %	35 %	40 %	39 %	40 %	15 %	17 %
51 à 100	22 %	30 %	8 %	7 %	7 %	19 %	6 %	5 %
Plus de 100	50 %	38 %	4 %	4 %	3 %	1 %	4 %	1 %
	Math	Chim	Math	Chim	Math	Chim	Math	Chim

Etes-vous allé l'an dernier au moins une fois écouter ...

	Pourcentages				
	un opéra ?	un concert symphonique ?	de la musique de chambre ?	des variétés ?	du jazz ?
Math	54	60	64	16	19
Chim	39	61	47	19	17

Mozart rend-il intelligent ?

L 'idée d'un « effet Mozart » est apparu après la publication en 1993 d'un article dans le journal *Nature*. En étudiant les effets de la *Sonate pour deux pianos en D Majeur* de Mozart, des chercheurs ont observé une amélioration temporaire du raisonnement spatio-temporel (mesuré avec le test de QI de Stanford-Binet) des étudiants qui en avaient écouté les 10 premières minutes.

De là à affirmer qu'écouter Mozart augmente l'intelligence, il n'y avait qu'un pas, d'ailleurs allègrement franchi par les medias, puis par les chercheurs eux-mêmes : ceux-ci, après avoir pourtant affirmé que leur travail était mal interprété et ses conséquences exagérées, ont fini par créer un institut et vendent désormais livres et CD aux parents désireux d'accroître les aptitudes de leurs enfants. Les performances en mathématiques, soit disant, bénéficieraient tout particulièrement de ce type de stimulation cérébrale. Bien sûr, d'autres se sont emparés du phénomène, et l'expression « Mozart Effect » a même été déposée.

Les vertus de la musique sur les sentiments et l'humeur étant déjà reconnues depuis longtemps, l'effet Mozart a rencontré peu de critiques. Le phénomène a pris une ampleur extraordinaire aux États-Unis : les gouverneurs du Tennessee et de Géorgie ont même décidé d'offrir un CD de musique classique à chaque nouveau-né !

A-t-on de solides raisons de penser que la musique est si bénéfique ? Ce n'est pas l'avis de nombreux autres chercheurs, dont certains ont reproduit l'expérience décrite dans Nature sans qu'apparaisse de corrélation entre musique et capacités intellectuelles.

Élise Janvresse

Références

- *Music and spatial task performance, Nature*, 365, 611 (1993), **F. H. Rauscher, G. L. Shaw, K. N. Ky**
- *The Mystery of the Mozart Effect - Failure to Replicate,* Psychological Science, Vol. 10, N° 4 (1999), **K. M. Steele, K. E. Bass, M. D. Crook**
- *Un lien vestige d'un passé révolu ?*, **Laurent Mazliak,** dans *Musique et mathématiques*, Éditions Aléas-Grame, 1997

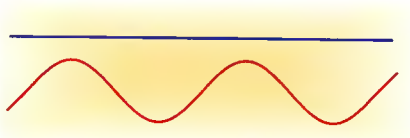
par Benoît Rittaud

La décomposition de Fourier

Si le son était un puzzle, ses pièces en seraient des sinusoïdes. Telle est en substance la découverte de Fourier qui, au dix-neuvième siècle, établit l'un de résultats les plus importants de l'analyse moderne.

J.-B. Fourier

Entre les deux dessins suivants quel est celui qui vous paraît objectivement le plus simple ?



Comme tout le monde, vous pensez sans doute que c'est la droite et, jusqu'au dix-neuvième siècle, il ne se serait pas trouvé grand monde pour vous contredire.

Descartes lui-même, qui, avec son repère cartésien, comprit le premier l'importance qu'allait prendre l'étude des fonctions, ne jurait que par les droites, les paraboles et autres polynômes, c'est-à-dire les graphes donnés par des équations telles que $y = x^5 + 2x^3 + x + 1$.

La limitation intellectuelle qu'il imposait à la géométrie analytique ainsi créée pouvait s'expliquer en partie par une raison bien simple : si compliquée que soit l'expression $x^5 + 2x^3 + x + 1$, elle ne met tout de même en jeu que deux types d'opération : l'addition et la multiplication.

Il n'y a pas moyen, en revanche, d'exprimer à l'aide des quatre opérations une sinusoïde, qui se définit à l'aide de notions trigonométriques (cf. encadré). La notation utilisée, $y = \sin(x)$ (pour *sinus*) est là pour en témoigner : vous pensez bien que si l'on savait ramener le sinus à quelque chose de plus simple, on ne s'en priverait pas.

Le compliqué devient le plus simple

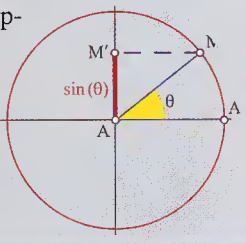
Bref, alors qu'il semblerait donc que les sinusoïdes soient à ranger dans la catégorie des courbes irrémédiablement compliquées auxquelles on ne se réfère que lorsqu'on ne peut pas faire autrement, la théorie de Fourier renverse complètement ce point de vue et place la fonction sinus (et ses sœurs) au cœur d'un dispositif mathématique, les séries de Fourier, qui permet d'exprimer toutes les autres fonctions (ou presque) à partir d'elle(s).

Considérons la courbe suivante, qui peut être celle d'un signal sonore :

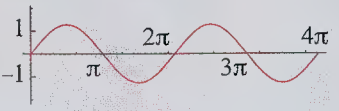
La fonction sinus

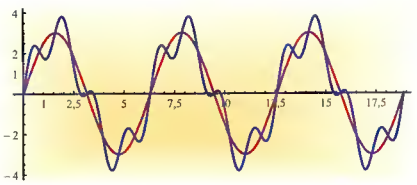
Considérons un point M d'un cercle de rayon 1, appelons θ l'angle $\widehat{MOA}$ et enfin M′ le projeté de M sur l'axe vertical.

La distance OM′ (comptée positivement si M′ est au-dessus de O, négativement sinon) définit le sinus de l'angle θ, noté $\sin(\theta)$.

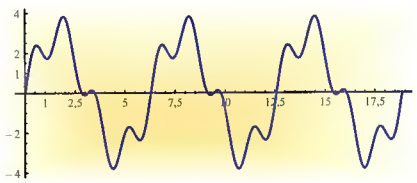


Lorsque M décrit le cercle dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, à vitesse constante et en partant du point A, alors la courbe représentative du sinus de l'angle en fonction du temps décrit une sinusoïde.





Celle-là, on accepte facilement l'idée qu'elle est constituée de sinusoïdes. Si on lui superpose la courbe d'équation $y = 3\sin(x)$, on voit la chose suivante :

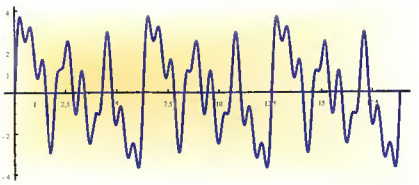


Il devient alors visible que le premier signal est la somme de deux sinusoïdes : en l'occurrence, il s'agit de la courbe d'équation

$$y = 3\sin(x) + \sin(4x).$$

Le coefficient 4 dans le second sinus se lit sur le dessin en remarquant que, dans chaque arche de la grande sinusoïde (une arche est une portion qui fait comme ça : ∼), la petite sinusoïde qui oscille autour fait 4 allers et venues.

Plus dur : comment décomposer le signal suivant, noté $y = f(x)$, en somme de sinusoïdes ?

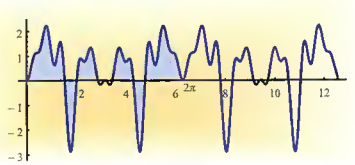


Là, il est moins facile de deviner l'équation exacte de la courbe en termes de sinusoïdes, même si la courbe présente avec elles un air de famille certain. On a alors recours à la théorie de Fourier, dont la « recette » est présentée ci après.

La recette de Fourier

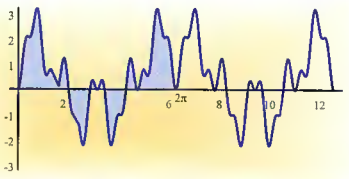
La fonction f du dessin précédent est de période 2π. On applique alors la suite d'opérations suivante :

- multiplier $f(x)$ par $\sin(x)$ (pour tout x) ;
- entre 0 et 2π, mesurer l'aire A_1 défini par l'axe des x et le graphe obtenu, en comptant positivement les morceaux au-dessus de l'axe des x et négativement les autres ;



À l'aide de la décomposition de Fourier, la technologie numérique peut entrer en scène pour reconstituer de la musique à partir de nombres.

- diviser A_1 par π : le résultat indique le coefficient b_1 à affecter à $\sin(x)$;
- tout recommencer avec $\sin(2x)$ au lieu de $\sin(x)$, pour obtenir b_2 ;



- tout recommencer avec $\sin(3x)$ pour obtenir b_3 ;
- et on continue…

On appelle alors décomposition de Fourier la fonction suivante, qui est à f ce qu'une liste d'ingrédients est à un bon plat :

$$f(x) = b_1 \sin(x) + b_2 \sin(2x) + b_3 \sin(3x) + \ldots$$

Pour le graphe indiqué plus haut, on a :

$$f(x) = 3\sin(x) + \sin(2x) + 2\sin(3x) + \sin(6x) + \sin(10x).$$

Ceux qui veulent faire savant pourront utiliser la formule suivante :

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx)\, dx .$$

Ça n'éclaire peut-être pas ceux qui ne connaissent pas les intégrales, mais ne soyons pas trop démagogique : en pratique, on est bien content d'avoir cette formule pour trouver les valeurs des b_n d'une fonction f donnée. Ceux qui connaissent déjà Fourier s'étonneront peut-être de l'absence de nos amis les cosinus : à eux je réponds qu'on se contente ici de regarder des fonctions impaires d'intégrale nulle, et que les choses sont déjà assez compliquées comme ça.

Un signal sonore est souvent constitué d'une somme finie de sinusoïdes. Ce qui précède est donc bien adapté pour réaliser une analyse du son : si f est envisagé comme un signal sonore, les valeurs 1, 2, 3, 6 et 10 que l'on retrouve comme coefficients de x dans l'expression

$$f(x) = 3\sin(x) + \sin(2x) + 2\sin(3x) + \sin(6x) + \sin(10x),$$

et qui correspondent à des fréquences, sont les *harmoniques*, c'est-à-dire les multiples de la fréquence fondamentale, celle du signal f lui-même ($1/2\pi$, en l'occurrence).

Fréquence, période

L'unité de mesure des angles (au moins en mathématiques) est le radian, qui est la mesure de l'arc de cercle délimité par A et M pour un cercle de rayon 1 (voir encadré précédent).

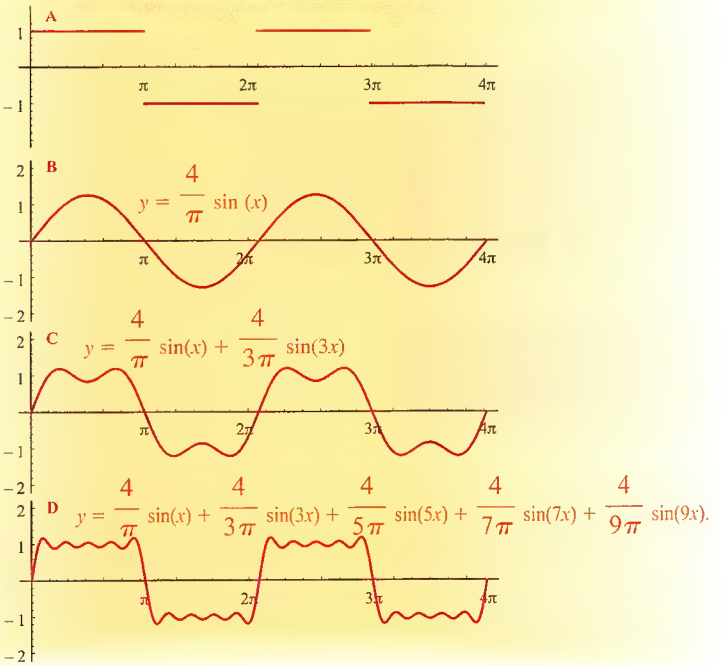
La formule classique

$S = 2\pi R$ implique que l'angle plein mesure 2π radians. Lorsque M a fait un tour complet (c'est-à-dire que l'angle θ est de 2π radians), le calcul du sinus *repart de zéro* : plus mathématiquement, on dit que le sinus est périodique de période 2π, autrement dit que, pour tout angle θ, on a :

$\sin(\theta) = \sin(\theta - 2\pi)$. Sur le dessin d'une sinusoïde, cela se traduit par le fait que lorsqu'on le décale de 2π vers la droite (ou vers la gauche, d'ailleurs), on retombe sur la même courbe.

Dès que la fonction f est périodique, un changement d'échelle peut toujours ramener à une fonction de période 2π (on pourrait prendre une période 1 mais, en pratique, ça ne simplifie pas les expressions : dans la théorie de Fourier, quoi qu'on fasse, il y a toujours du 2π quelque part). Par définition, on appelle *fréquence* de f l'inverse de la période : pour le sinus, la fréquence est donc de $1/2\pi$.

En physique, l'unité de fréquence est le Hertz (noté Hz), qui est l'inverse de la période elle-même mesurée en secondes (1 Hz correspond ainsi à « 1 tour par seconde », 2 Hz à « 2 tours par seconde », etc.



Signaux tordus

Mais c'est pour des signaux plus compliqués que la théorie de Fourier prend véritablement son sens.

Prenez un bout de courbe, et prolongez-le de manière périodique. Le bout que vous voulez, tracé avec votre crayon ou votre ordinateur. (Enfin tout de même : ne soyez pas trop mathématicien dans votre manière de tracer, vu que ces drôles de raisonneurs ont toujours assez de cas pathologiques dans leur sac pour faire échouer les plus beaux théorèmes.) Par exemple, la fonction constante par morceaux représentée en A.

Là, en-dehors du caractère périodique de la courbe, on ne voit pas bien le rapport entre ce signal dit « créneau » et une sinusoïde bien lisse. Et pourtant : pour ce graphe aussi, la recette de Fourier s'applique. Le seul problème, c'est que la décomposition ainsi obtenue est constituée d'une somme d'une infinité de termes. Plus on en prend, plus on s'approche de la « vraie » courbe, ce qui fait qu'en pratique, on peut bien se contenter des premiers (dessins B, C, D).

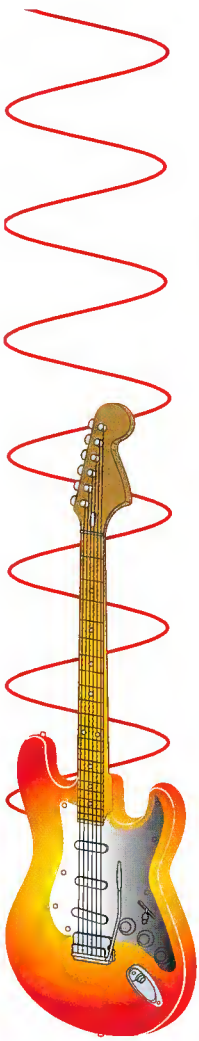
C'est ainsi qu'un signal à peu près quelconque peut se « coder » par les valeurs b_n ; la technologie numérique peut alors entrer en scène pour reconstituer de la musique à partir de nombres.

Pour mémoire, notons que Fourier lui-même a créé sa théorie pour répondre à des problèmes de propagation de la chaleur, qui n'avaient rien à voir avec le signaux sonores ; ce qui prouve une fois de plus que non seulement « la science n'a pas de patrie », comme disait Pasteur, mais qu'elle n'a pas non plus de frontières disciplinaires, hors celles que nous autres pauvres humains trouvons utile de lui attribuer pour la faire avancer.

B. R.

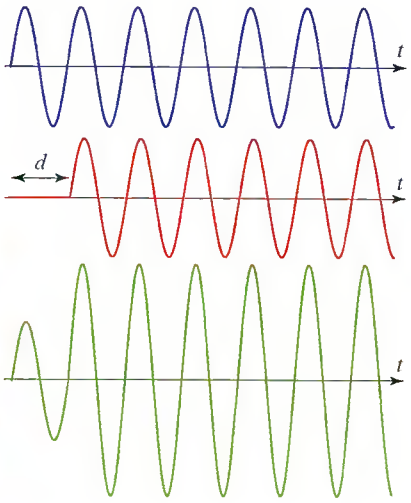
par Daniel Arfib

Un filtre en canon

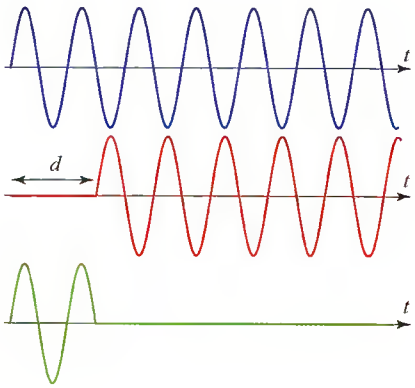


Le mariage d'un son avec lui-même peut le modifier avantageusement, à une condition : le reproduire pour l'unir avec son double décalé dans le temps.

Considérons un signal sonore le plus simple possible, c'est-à-dire dont le graphe $y = f(t)$ est une bête sinusoïde. J'appelle *utiliser une ligne à retard* la technique consistant à ajouter à ce signal le même signal, mais décalé dans le temps d'un délai noté d. On obtient ainsi un nouveau signal, de la forme $s(t) = f(t) + f(t - d)$.



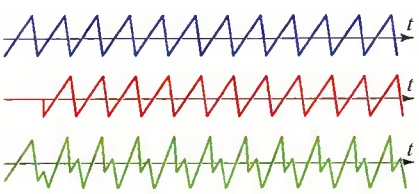
Si le son décalé est en phase avec le son originel, ce qui se traduit graphiquement par le fait que les courbes montent et descendent en même temps, alors les deux signaux s'ajoutent et le son en sort renforcé. Cela arrive quand le délai est un multiple de la période du signal (la période est l'intervalle de temps correspondant à la répétition d'une sinusoïde, et donc l'inverse de la fréquence).



Si le son décalé entre en *opposition de phase* avec le son original, c'est-à-dire que lorsqu'une sinusoïde est à son sommet, l'autre est à son plus bas (et inversement), alors le son résultant est nul (silence), puisqu'à chaque instant les deux signaux s'annulent. Ce cas se produit lorsque le quotient du délai par la période du signal tombe juste entre deux nombres entiers.

Son + son = silence !

Bilan : le son se renforce lorsqu'on a la relation $f = n/d$ et disparaît si $f = (n + 0{,}5)/d$, où f est la fréquence, d le délai et n un entier quelconque. Mais ce sont là des cas extrêmes : en pratique, la fréquence et le délai sont rarement dans un rapport aussi exact ; on peut montrer que l'amplitude A de sortie (i.e. la hauteur maximum du son final) quand l'entrée est une sinusoïde quelconque vérifie la relation $A = 1 + \cos(2\pi f/d)$. Cela donne un *filtre en peigne* numérique, qui retire certaines fréquences et en renforce d'autres. Autrement dit, lorsque le son initial n'est plus une sinusoïde mais un son complexe (donc une somme de sinusoïdes, d'après la théorie de Fourier), certains aspects du son vont apparaître et d'autres disparaître. Le son est ainsi *coloré*.



Le résultat est encore plus sensible si l'on fait varier le délai, ce qui constitue le *flanging* : cette fois, c'est le filtre qui bouge, un peu comme les plis d'un accordéon, provoquant un effet très sensible à l'audition. Un effet correspondant est celui que l'on ressent au décollage d'un avion, lorsque le sol constitue une surface réfléchissante sous nos oreilles.

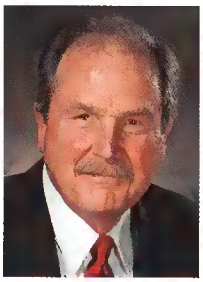
L'usage de ces délais est on ne peut plus répandu en traitement de signal : le filtrage numérique tout entier s'appuie sur eux, parfois en modifiant un peu les formules. Tout cela ne constitue qu'une mince part du domaine des effets dits audionumériques ; les amateurs pourront avec avantage voir comment la science, la technique, mais aussi la musique tirent avantage de tels faits mathématiques pour réaliser des œuvres artistiques.

D. A.

par Hervé Lehning

MP3 : le son compressé

La nécessité de compresser le son pour permettre sa circulation sur le « web » est à l'origine du MP3 : une solution qui allie méthodes traditionnelles de compression sans perte et méthodes de filtrage du son dont les pertes sont sans effet pour l'oreille humaine.



David Huffman (1925-1999) a découvert les codes qui portent son nom en 1952 alors qu'il était étudiant au M. I. T.

En termes de compression sans perte, tous les fichiers sont égaux.

Un DVD pleine capacité permet de stocker 17 giga-octets : l'équivalent de 27 CD-audios ! Alors, pourquoi comprimer les fichiers ? La réponse tient en un mot : Internet. Les perspectives de vente de musique par l'intermédiaire de ce média changent la donne car le téléchargement de fichiers n'est possible que s'ils ont une taille raisonnable.

Un fichier, qu'il soit audio ou pas, est a priori une suite d'octets c'est-à-dire de groupes de huit bits (0 ou 1). C'est pourquoi on compte leurs tailles en kilo-octets (mille octets), méga-octets (million d'octets) et même giga-octets (milliard d'octets). Mathématiquement parlant, un algorithme de compression est donc une fonction f de l'ensemble des fichiers dans lui-même qui à un fichier T associe un autre fichier $f(T)$ de taille plus petite. Ce fichier $f(T)$ est appelé le fichier compressé.

Si à partir du fichier compressé $f(T)$, il est possible de retrouver l'original T, on parle de compression sans perte. On voit que si on s'intéresse aux compressions sans perte, tous les fichiers sont égaux. Peu importe ce qu'ils représentent !

Le codage de Huffman

Avant de retourner à la musique, nous vous proposons donc un détour vers le problème de la compression sans perte que Huffman a résolu en 1952. Sa méthode est utilisée en particulier pour la transmission de messages par télécopie, minitel et internet. Sur vos ordinateurs, les noms des programmes correspondants se terminent en général par zip. L'idée de Huffman est la suivante. Dans chaque message, les caractères apparaissent avec une certaine fréquence qu'il est facile de déterminer. Pour cela, il suffit de lire le texte. Chaque caractère est alors codé en une suite de 0 et de 1 de façon que les caractères de forte fréquence aient un code plus court que ceux rencontrés

moins souvent. Nous arrivons ainsi à un gain de l'ordre de 70 % en général mais il dépend de la fréquence de chaque caractère du texte. L'encadré « Principes du codage de Huffman » montre comment fonctionne ce procédé de compression.

Sans nuire à l'audition

Sans perte de qualité, on ne peut pas mieux faire que Huffman. Si le fichier doit être restitué identique à lui-même, il n'est pas question d'aller plus loin. Ce n'est pas la même chose dans le cas de l'image et du son. On peut admettre dans ces cas des pertes de qualité ne nuisant pas à la vision ou l'audition. Autrement dit, dans le cas du son, on utilise les imperfections de l'oreille humaine pour éliminer ce qui est imperceptible à l'auditeur humain. Ceci fait, la compression de Huffman est ensuite appliquée. Le phénomène est identique dans le cas de l'image. La compression est alors moins bonne car les humains voient mieux qu'ils n'entendent.

L'oreille humaine ne peut discerner les sons dont la fréquence est située en dessous de 20 Hertz et au-dessus de 20 kilo-Hertz. Il est donc possible de supprimer une bonne partie des informations d'un enregistrement sonore sans nuire à la gamme de fréquences audibles par notre oreille. La première

Les principes du codage de Huffman

Supposons que nous ayons à transmettre un texte composé seulement avec les lettres a, b, c, d et e. Les fréquences d'apparition de ces lettres dans un texte (imaginaire) sont données par le tableau ci-dessous.

lettre	a	b	c	d	e
fréquence	5 %	50 %	20 %	10 %	15 %

En code ASCII, chaque caractère a la taille d'un octet c'est-à-dire huit bits (0 ou 1). Un texte d'un million de caractères utilise donc un méga-octets s'il est codé en ASCII. Dans notre cas, nous n'avons que cinq caractères différents, nous pouvons donc les coder chacun sur trois bits selon la table de codage :

a : 000, b : 001, c : 010, d : 011 et e : 100

Le codage du texte proposé aura alors trois millions de bits au lieu de huit millions, soit un gain de plus de 60 % ! Le décodage est simple en lisant la table de codage à l'envers et en découpant le texte codé en groupes de trois bits.

Codes de longueurs variables

Une idée plus subtile consiste à utiliser des codes de longueurs variables.
Voici une table de codage adaptée :

a : 1101, b : 0, c : 101, d : 111 et e : 100

Pour 100 caractères à coder, nous avons donc en moyenne :

$$5 \times 4 + 50 \times 1 + 20 \times 3 + 10 \times 3 + 15 \times 3$$

soit 205 bits.
Pour un million de caractères, nous obtenons donc 2 050 000 bits. Nous obtenons ainsi un gain supplémentaire d'environ 30 % .

La méthode de décodage précédente n'est plus applicable car les codes sont à présent de longueur variable. Le texte codé est une liste de bits. Lors du décodage, ils sont lus et accumulés l'un après l'autre jusqu'à obtenir un code valide. Par exemple, avec la table de codage précédente, un mot a été codé en 11111010100. Pour le décoder, nous lisons le premier bit (1). Il ne constitue pas un code. Nous lisons le bit suivant (1 encore) ce qui donne 11. Ce n'est pas un code non plus. Nous continuons donc et obtenons 111 qui est le code de d.
Nous notons d et remettons l'accumulateur à zéro. Nous reprenons 1, 11, 110 ne sont pas des codes, 1101 en est un, celui de a. Et ainsi de suite. Aucune ambiguïté n'est possible car aucun code n'est le préfixe d'un autre.
Nous obtenons finalement le mot *dabe*.

David Huffman a trouvé un algorithme permettant de coder et décoder un texte en minimisant la longueur du texte codé. Cet algorithme est fondé sur les arbres de Huffman (détaillés dans le hors- série de *Tangente* consacré aux graphes).

Qualité Sonore	Mode	Réduction
Téléphone	*mono*	96:1
Ondes courtes	*mono*	48:1
Radio AM	*mono*	24:1
Radio FM	*stéréo*	26...24:1
Proche du son CD	*stéréo*	16:1
CD	*stéréo*	14...12:1

Taux de compression du MP3 suivant la qualité sonore

étape du processus de compression consiste donc à supprimer les sons au-delà de la perception humaine. La seconde repose sur l'élimination des fréquences masquées par des fréquences plus puissantes. De façon générale, le procédé évalue le signal audio et essaie d'en créer une copie qui trompe l'oreille en lui faisant croire qu'elle entend le son original.

En encodant les sons de cette manière, le MP3 (Huffman compris) permet de réduire la taille d'un fichier audio dans un rapport de 12 pour 1 en éliminant de l'information mais en conservant une qualité sonore tout de même proche de celle du CD. Ce taux peut être amélioré jusqu'à 96 pour 1 si la qualité du son est plus faible (voir le tableau « taux de compression du MP3 suivant la qualité sonore »).

Fourier encore...

Comment à partir d'un fichier a priori composé d'octets peut-on éliminer les sons inaudibles ? Comme souvent en mathématiques, la solution existait avant le problème. Nous la devons à Fourier (voir l'article sur le sujet dans ce numéro). Le son est d'abord décomposé par transformée de Fourier. Le résultat permet de déterminer les seuils de masquage en fonction des limitations de l'oreille humaine décrites ci-dessus. On utilise alors ces seuils pour éliminer les informations inutiles puis on réassemble ce qui reste en un fichier d'octets.

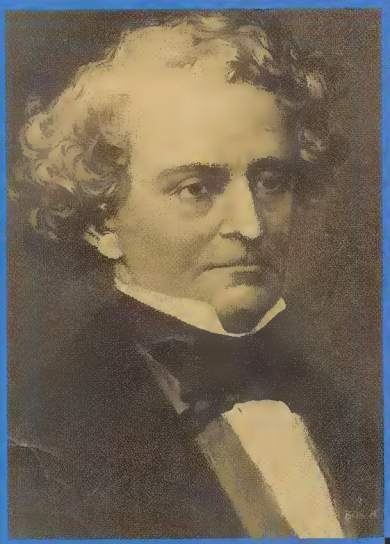
MP3 est-il pour autant la solution finale au problème de la compression des sons ? La réponse est bien entendu « non ». Cette affirmation ne vient pas d'une foi de charbonnier en le progrès des sciences en général et des mathématiques en particulier. Le codage de Huffman, par exemple, ne peut être amélioré car le problème est clairement posé en termes mathématiques. Il s'agit de réduire la taille d'un fichier sans perte de données.

Dans le cas de la compression musicale, un facteur psychologique est introduit. Il s'agit de réduire la taille d'un fichier sans que l'oreille humaine puisse entendre la différence. En ce qui concerne l'oreille gauche de l'auteur de cet article, on peut aller bien plus loin. Pour celles de Luciano Pavarotti, il est permis d'en douter car MP3 est sans doute déjà à la limite de l'acceptable.

H. L.

Pourquoi MP3 ?

MP signifie MPEG (Moving Picture Experts Group), un groupe en partenariat avec l'ISO (International Standards Organization). 3 signifie successeur de 1 et 2. MP3 est donc une amélioration de MP2 qui en était une de MP1. C'est pourquoi, pour MP3,on dit souvent MPEG Layer 3.



Une nuit à l'opéra

Le musicien Hector Berlioz (1803-1870) raconte dans le chapitre XV de ses *Mémoires* (publiées en 1969 aux Éditions Garnier Flammarion) une anecdote amusante dans la partie intitulée « mes soirées à l'opéra ». L'histoire se déroule pendant la représentation d'*Œdipe à Colone*, l'opéra d'Antonio Sacchini, qui eut un succès colossal et fut joué sans interruption pendant plus de cinquante ans. Berlioz avait entraîné à ce spectacle un jeune homme tout à fait imperméable au charme de l'œuvre, mais qui était placé à côté d'un spectateur bouleversé par la musique et l'interprétation. « C'est sublime ! ... Quel art céleste ! ... Ah, monsieur, quelle musique ! » ne cessait-il pas de répéter tandis que son voisin pelait une orange avec indifférence. À la fin d'un trio particulièrement beau, Berlioz, qui se trouvait un rang derrière, manifesta son émotion. Il n'en fallut pas plus pour que le spectateur le serre dans ses bras, ravi de constater que quelqu'un partageait son enthousiasme. Laissons Berlioz poursuivre :

« Sans m'étonner le moins du monde, et la figure toute décomposée par les larmes, je lui réponds par cette interrogation :

– Êtes-vous musicien ?

– Non, mais je sens la musique aussi vivement que qui que ce soit.

– Ma foi, c'est égal. Donnez-moi votre main. Pardieu, monsieur, vous êtes un brave homme.

Là-dessus, parfaitement insensibles aux ricanements des spectateurs qui faisaient cercle autour de nous, comme à l'air établi de mon néophyte mangeur d'oranges, nous échangeons quelques mots à voix basse, je lui donne mon nom, il me confie le sien et sa profession. C'était un ingénieur ! Un mathématicien !!! Où diable la sensibilité va-t-elle se nicher ! »

par Daniel Arfib

Les métamorphoses d'une sinusoïde

La distorsion non-linéaire est l'un des outils les plus curieux de l'armada des traitements possibles sur un signal numérique. Objectif : améliorer les sonorités et réaliser des effets nouveaux.

Les joueurs de guitare électrique connaissent les pédales de distorsion, où l'on dose le taux de distorsion pour faire surgir des sonorités plus présentes.

Considérons un signal sonore, donné sous la forme d'une fonction du temps notée $e(t)$, et imaginons que nous souhaitions le modifier, d'une manière ou d'une autre. On va alors appliquer à $e(t)$ une fonction f, pour obtenir un nouveau signal, s, qui s'écrit sous la forme :

$$s(t) = f(e(t)).$$

S'agissant d'un son numérique, $e(t)$ n'est pas défini sur tout un intervalle mais seulement pour une suite de valeurs données qui se suivent à intervalles réguliers (44 100 fois par seconde sur un CD), il convient alors de remplacer la variable t par un indice i.

Distordre pour améliorer ?

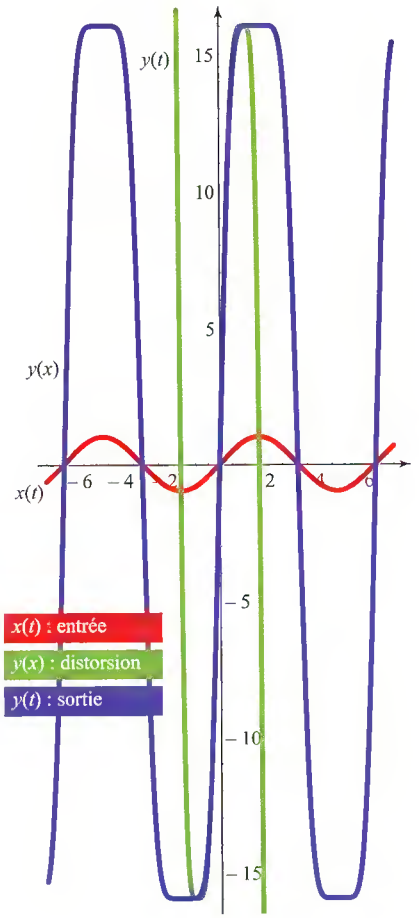
Cette opération mathématique, qui part de e pour aboutir à s et est parfois appelée conformation (« waveshaping » en anglais), constitue une distorsion non-linéaire dès lors que f n'est pas une fonction linéaire (c'est-à-dire que f n'est pas associée à l'équation d'une droite, comme l'est la fonction $y = ax+b$).

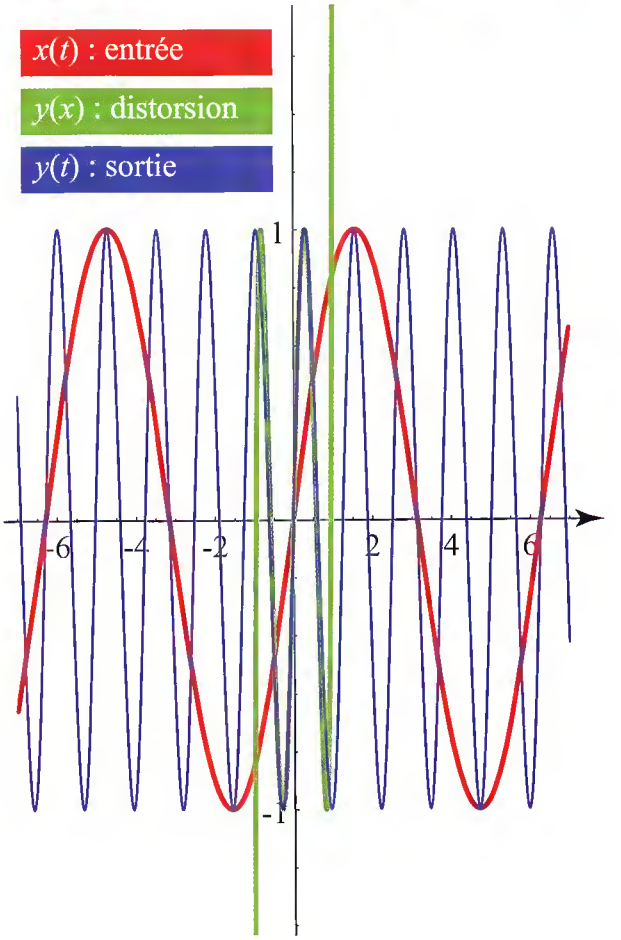
Si la fonction non-linéaire f représente celle d'un amplificateur non linéaire, la courbe $f(x)$ présente une allure dite de « saturation ». La courbe est différente suivant l'amplificateur : la distorsion d'un amplificateur à lampes n'est pas la même que celle d'un amplificateur à transistor.

Les joueurs de guitare électrique connaissent aussi les pédales de distorsion, où l'on dose (plutôt plus que moins, d'ailleurs) le taux de distorsion pour faire surgir des sonorités plus présentes.

Dans l'exemple précédent, on a distordu une sinusoïde d'amplitude 1 avec une fonction

$$f(x) = 35x - 35x^3 + 21x^5 - 5x^7.$$





Cette fonction a la propriété d'être symétrique autour de l'axe des y et d'avoir ses premières dérivées nulles pour $x = 1$: pour ainsi dire, elle « colle » à la direction horizontale lorsque x s'approche de 1 (cela en fait une très bonne candidate à la distorsion par écrêtage doux).

Prenons pour entrée une sinusoïde, comme par exemple un do à 261,62 Hz, et pour fonction de distorsion un polynôme de Tchebycheff (cf. encadré). Puisque le signal d'entrée est donné par $e(t) = \cos(2\pi f t)$, avec $f = 261{,}62$, la sortie est $\cos(2\pi n f t)$ d'après la propriété fondamentale des polynômes de Tchebycheff.

C'est ainsi que, si l'entrée $e(t)$ est un cosinus à fréquence f, on sort de la boîte un cosinus à fréquence nf, ce qui est un peu bizarre : on s'attendait à distordre, et on n'a fait que changer de fréquence.

Tout ça pour ça ?

Il n'y a pas de truc, mais ça ne marche que si l'entrée est d'amplitude unitaire, c'est-à-dire que les points les plus hauts de la sinusoïde sont d'ordonnée 1 : si l'entrée a un facteur d'amplitude k, soit un signal donné par $e(t) = k\cos(2\pi f t)$ où k est différent de 1 (et de -1), alors la sortie ne sera pas une cosinus à fréquence nf. Le calcul exact du signal distordu alors obtenu est assez complexe (il fait intervenir le calcul matriciel), mais il est tout de

Les polynômes de Tchebycheff

Les polynômes de Tchebycheff sont une suite de fonctions ainsi définies : le premier polynôme de Tchebycheff, noté T_0, est la fonction constante égale à 1 (soit : $\mathbf{T_0(x) = 1}$ pour tout x) ; le suivant, T_1, est l'identité (soit : $\mathbf{T_1(x) = x}$).
À partir de là, pour connaître la formule définissant le polynôme T_n, on applique la formule de récurrence :

$$\mathbf{T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x).}$$

Appliquée à $n = 2$, cela donne $T_2(x) = 2xT_1(x) - T_0(x)$, soit

$$\mathbf{T_2(x) = 2x^2 - 1.}$$

Pour $n = 3, 4, 5$, on obtient :

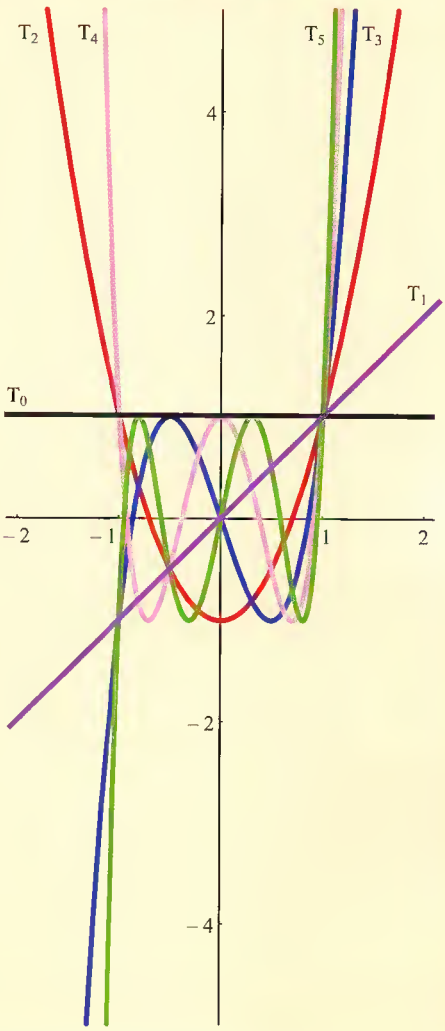
$$\mathbf{T_3(x) = 4x^3 - 3x}$$

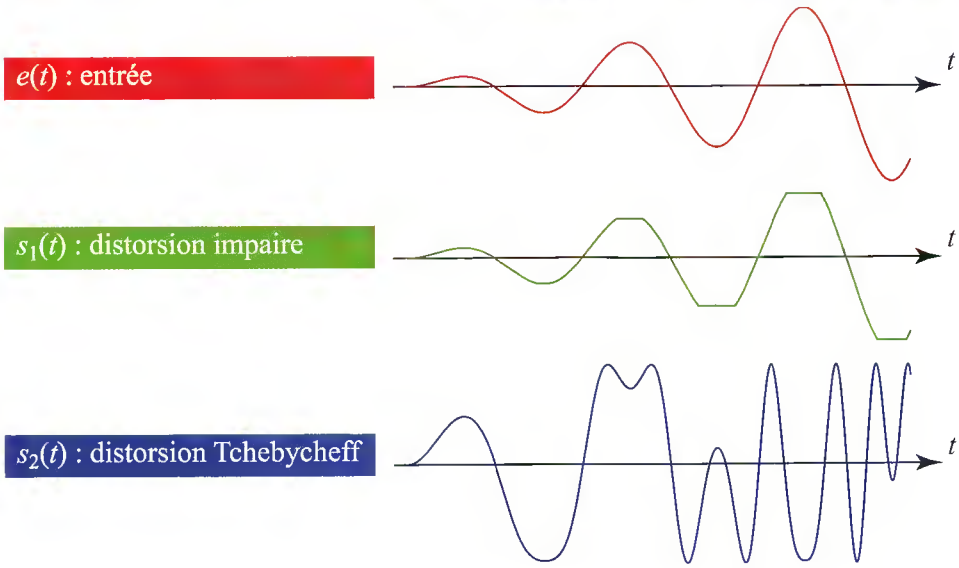
$$\mathbf{T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1}$$

$$\mathbf{T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x.}$$

Une propriété fondamentale des polynômes de Tchebycheff, qui explique leur importance en traitement du signal, est la relation suivante, valable pour tout entier n et tout réel x :

$$\mathbf{T_n(\cos(x)) = \cos(nx).}$$



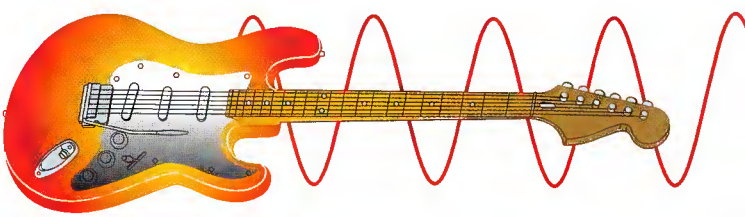


même possible de visualiser ce qui se passe pour ces signaux d'amplitude non unitaire. Mettons ensemble sur un graphique une entrée en cosinus avec un facteur d'amplitude allant de 0 à 1, et cela pour une fonction $f(x)$ qui soit un polynôme de Tchebycheff d'ordre 5 (celui appelé T_6 dans l'encadré). De la sorte, on peut regarder en fonction du temps le signal de sortie.

Lorsque k est faible, il n'y a pas beaucoup de distorsion, et le signal de sortie est quasiment proportionnel à l'entrée : la fréquence entendue ne bouge pas. Lorsque le coefficient d'amplitude, k, grandit, on obtient un signal passablement déformé, dont une analyse nous indiquerait qu'il contient de l'harmonique 1,3 et 5, c'est-à-dire qu'il s'écrit essentiellement comme une somme de sinusoïdes de fréquences f, $3f$ et $5f$. Lorsque k atteint la valeur 1, il est tellement déformé qu'il contient le plein d'harmonique 5, c'est-à-dire qu'il constitue pratiquement un son pur de fréquence $5f$.

Tout cela est la base d'une méthode de synthèse de son par ordinateur très puissante, la distorsion non-linéaire de sinusoïdes, qui permet d'obtenir des sons synthétiques de qualité. Si l'on prend non plus des polynômes de Tchebycheff mais une combinaison linéaire de tels polynômes (c'est-à-dire, en gros, une somme pondérée de plusieurs d'entre eux), on obtient des distorsions programmables. Pour ma part, j'ai beaucoup joué avec ces distorsions, par exemple en utilisant des doubles distorsions par polynômes de Tchebycheff : on distord une première fois puis une seconde, pour obtenir un signal de la forme $s(t) = g(f(e(t)))$. C'est cette technique que j'ai employée dans une musique de synthèse numérique *Le Souffle du Doux*, 1979.

D. A.



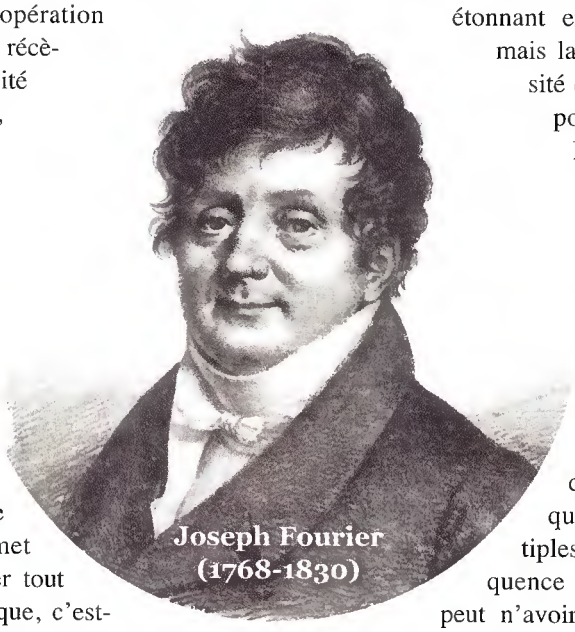
par Daniel Arfib

Faire un son avec d'autres sons

Un son étant la donnée d'une fréquence, on pourrait croire que le seul moyen de produire ce son est de disposer de cette fréquence. Que nenni ! La théorie de Fourier et l'informatique permettent de procéder tout autrement.

Comment une sinusoïde sur une note peut- elle être fabriquée en additionnant des notes tout à fait différentes ?

La théorie de Fourier est d'usage généralisé dans le traitement du signal sonore. Cette opération mathématique récèle une curiosité remarquable, celle de permettre la recomposition d'un signal périodique à l'aide de fonctions sinusoïdales. L'analyse de Fourier permet de décomposer tout signal périodique, c'est-à-dire toute fonction périodique (avec quelques hypothèses raisonnables sur la régularité de son graphe), en une somme de sinusoïdes (cf. p. 90). C'est certes un résultat assez étonnant en lui-même, mais la vraie curiosité de la décomposition de Fourier, c'est qu'elle permet de recomposer un signal lui-même sinusoïdal à partir de sinusoïdes de fréquences multiples d'une fréquence donnée qui peut n'avoir aucun rapport avec la fréquence de la sinusoïde ainsi recomposée.



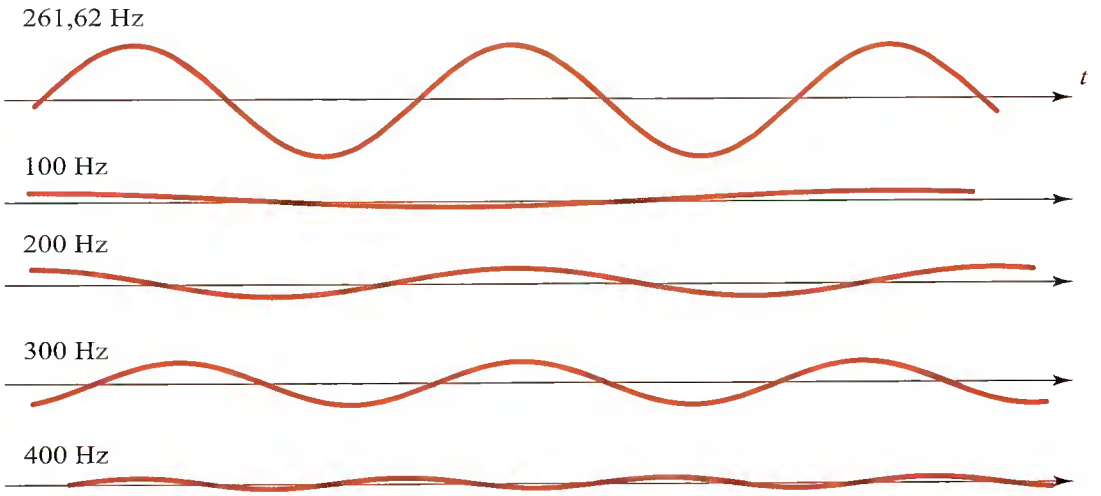
Joseph Fourier (1768-1830)

Le théorème de Fourier affirme qu'on peut décomposer et recomposer un signal périodique de fréquence f en une somme de signaux sinusoïdaux possédant des amplitudes, des phases et des fréquences qui sont multiples de la fréquence considérée. Mathématiquement, cela se traduit par l'égalité suivante, où les pointillés indiquent que la somme se poursuit avec d'autres termes sinusoïdaux de fréquences multiples de la fréquence fondamentale ω :

$f(t) = h_1 \times \sin(\omega t + \phi_1) + h_2 \times \sin(2\omega t + \phi_2) + h_3 \times \sin(3\omega t + \phi_3) + \ldots$

En pratique toutefois, il est rare que l'on ait affaire à un son périodique, surtout lorsque l'échelle de temps considérée est infinie. En revanche, des signaux pseudo-périodiques se retrouvent pour une période de temps brève dans l'*état stationnaire* de nombreux instruments dits entretenus, la voix en étant l'un des exemples les plus frappants. Dans ce cas usuel, les fréquences multiples sont dites harmoniques du son fondamental, et constituent l'une des caractéristiques du timbre. Le timbre est une notion plus vaste qui fait intervenir le déroulement temporel, notamment lors de l'attaque d'un son, et des nuances (par exemple des bruits, un *vibrato*), qui ne seront pas abordées ici.

Analyse du do



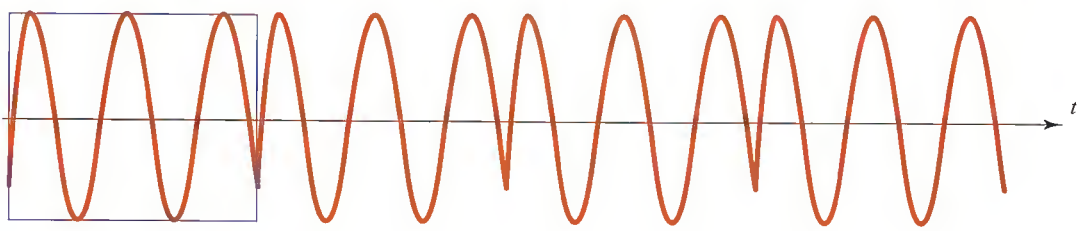
Considérons à présent une tranche de son de 1/100e de seconde, issue d'un signal périodique à 261,62 Hz. En clair, il s'agit de la note do, jouée un centième de seconde. Par le théorème de Fourier, on peut décomposer ce signal en une somme de signaux sinusoïdaux de fréquence 100 Hz, 200 Hz, 300 Hz, etc. Pour calculer cette décomposition, le mieux est de passer en mode numérique : sur un lecteur CD, le son est « enregistré » sous la forme d'une suite de nombres, codés en binaire. Chaque voie (une voie est le son allant au haut-parleur gauche ou au haut-parleur droit) est codée par un nombre sur 16 bits (comme le format entier sur un ordinateur), avec pas moins de 44100 nombres pour une seule seconde de son. Ces valeurs constituent un standard, le standard CD.

Un centième de seconde est donc représenté par 441 échantillons et, pour connaître la décomposition de Fourier, il faut comparer le signal avec les sinusoïdes à 100, 200, 300 Hz etc. Nous vous faisons grâce du calcul, qui donne le résultat suivant :

$23{,}23 + 55{,}0749\sin(2\pi 100t + 1{,}7310) + 117{,}0383\sin(2\pi \times 200t + 1{,}8844) + 162{,}6223\sin(2\pi \times 300t - 1{,}1159) + 40{,}8287\sin(2\pi \times 400t - 0{,}9892) + 22{,}1290\sin(2\pi \times 500t - 0{,}8779) + 14{,}8686\sin(2\pi \times 600t - 0{,}7809) + \ldots$

Tout cela semble décidément défier le bon sens : comment une sinusoïde sur une note peut-elle être fabriquée en additionnant des notes tout à fait différentes ? Cela ne correspond pas à l'expérience du monde. A-t-on enfin un défi mathématique à notre raisonnement humain ? Hélas non : nous avons certes réussi à fabriquer 1/100^{e} de seconde de la note do, mais, si l'on continue (à gauche et à droite), on voit qu'il est la répétition de ce signal, et qu'il présente donc une discontinuité importante à chaque 1/100^{e} de seconde. De fait, ce signal est bien périodique avec une période de 100 Hz.

Le vocodeur de phase



Ce type de problème a une grande importance dans une technique de traitement de son appelée le « vocodeur de phase », qui s'appuie sur des images appelées « sonagrammes ». Ces sonagrammes sont des représentations de son où l'on visualise le contenu fréquentiel du son pendant que le temps s'écoule. Comme on n'a pas une connaissance a priori du son, on réalise des opérations comme les transformées de Fourier, notamment par l'algorithme dit FFT (Fast Fourier Transform, transformée de Fourier rapide), qui jouent avec ce genre de considérations. Une sinusoïde est représentée par un nuage flou autour d'une ligne, les différentes valeurs sont représentées sur un quadrillage bien régulier... et sans rapport avec la vraie fréquence des sons, ce qui n'empêche pas au « vocodeur de phase » d'être utilisé pour fabriquer des effets audionumériques. Par exemple, chacun sait que, lorsqu'on fait défiler un enregistrement sonore à une vitesse inférieure à celle à laquelle il a été enregistré, le résultat est un son, généralement pas très agréable, plus bas que le son initial (si vous n'avez pas jeté l'antique tourne-disque qui trône dans votre grenier, faites donc tourner un disque « 45 tours » sur le mode « 33 tours »). Cela est dû au fait que la fréquence émise par le lecteur est fonction de la vitesse de lecture, laquelle doit donc être toujours la même si l'on veut que la hauteur des sons soit préservée. Le numérique, lui, se moque de ces limitations, et il est aujourd'hui possible de réaliser grâce à lui des ralentissements sans changement de hauteur. Et ce n'est pas la seule bizarrerie que le numérique permet...

D.A.

Lieux & figures

La Cité de la musique p. 108
L'Opéra de Pékin p. 111
Leonard Bernstein p. 112
Alain Connes p. 113
Femmes et musique p. 114
Les arêtes du cube p. 116
Ernest Ansermet mathématicien et musicien p. 118
Tom Johnson p. 121
Michel Deneuve cristaliste p. 122
Du club de maths au CD professionnel p. 126
Francis Reynes, le matheux chantant p. 132

Un hors-série consacré à la musique ne serait pas complet sans un regard sur quelques lieux et figures emblématiques de cette discipline. Voyage à la Cité de la musique à Paris et à l'Opéra de Pékin, conçu par un architecte français. Voyage également avec des hommes connus et moins connus, de Bernstein à Arnaud Chatirichvili en passant par un Alain Connes inattendu, sans oublier les femmes : Germaine Tailleferre, Clara Schumann ou Lili Boulanger...

par Marie-José Pestel

La Cité de la musique

Depuis son ouverture en 1995, prolongée par celle du musée en 1997, la Cité de la musique peut s'enorgueillir d'être restée fidèle à l'idée originelle : réunir dans un même lieu des équipements consacrés à l'enseignement, la diffusion et la conservation de la musique.

Cité de la musique
© Harald A. Jahn

Plus qu'une architecture au service de la musique, c'est l'architecture qui est musique.

Le promeneur qui déambule de la Cité des sciences à la Cité de la musique, à travers la Géode, le parc paysager avec ces jolis pavillons rouges qu'on nomme *folies*, et la Grande Halle de la Villette, trace un trait d'union entre sciences et musique.

La Cité de la musique est un « travail de musicien ». Goethe voyait dans l'architecture « une musique pétrifiée » ; ici, tout est plutôt une invitation au mouvement. L'architecte Christian de Portzamparc a conçu cet espace comme une symphonie en deux mouvements : l'un agité, l'autre calme ; l'un va piano, l'autre crescendo ; sculptural à l'est, monumental à l'ouest.

Côté ouest, quatre blocs élégants retenus par une toiture débordante : c'est le conservatoire. Côté est, plus contrasté, les bâtiments répondent à une grande diversité de fonctions.

La Cité de la musique ouvre ses murs sur la ville et la lumière. En optant pour le principe de plusieurs bâtiments dans un même édifice, Portzamparc cherche à former des enveloppes acoustiques afin de créer des transparences entre différentes entités. L'architecte veut capter la lumière et fermer l'espace au bruit extérieur. Partout il joue sur les pleins et les vides, crée des anfractuosités. L'orchestration est fine, à la faveur de belles alternances entre clair et obscur ; les salles d'en haut sont tournées vers le ciel, le Musée de la musique est un espace d'ombre et de mystères. La Rue Musicale, à la fois labyrinthe et repère, perce dans le bâtiment une allée de lumière sous sa verrière étincelante.

Visite guidée

Etape incontournable de ce lieu magique : la Grande Médiathèque Musicale, passage obligé de celui qui veut faire carrière dans la musique, qui ouvrira ses portes dès le mois de septembre 2005. Tout ce qui s'écrit ou se fait dans et autour de la musique s'y trouve-

www.cite-musique.fr.

ra : Internet, CDRoms, vidéothèque, discothèque, revues, stages musicaux en France et à l'étranger, métiers du musicien,…
Le Centre de documentation du Musée contient, quant à lui, la mémoire historique et technique des instruments de musique (plan, factures, restauration, entretien).

La Cité de la musique possède également un laboratoire où les instruments acquis sont étudiés, analysés. Un bilan de santé complet est dressé grâce à des moyens modernes et permet de décider de leur avenir : restaurer ? garder en état ?

La salle des concerts, rencontre d'un cône et d'un cylindre, « instrument unique avec lequel il faut apprendre à jouer », est la pièce maîtresse de la Cité. L'ensemble intercontemporain est en train d'y travailler, laissant apprécier l'acoustique de cet espace modulable. Double modularité avec des rideaux mobiles au fond des loges et des panneaux réversibles au plafond. La salle de concert d'une capacité de 800 à 1200 places peut évoluer au gré de la musique qui s'y joue. Boulez l'aurait souhaitée rectangulaire, Portzamparc l'a vue elliptique.
Finalement c'est une salle « non polarisée », qui permet des installations différentes : pour certaines pièces, les musiciens sont aux quatre angles, dans d'autres circonstances, l'orchestre est au centre… Dotée d'un sol plat, elle est équipée de balcons qui suivent la courbe de l'ellipse au-dessus du parterre ; de la galerie circulaire, on peut alors entendre battre le cœur de la salle. Le rectangle aménagé par l'architecte au centre de l'ellipse permet d'atteindre un grand confort spatial et musical. Il change carrément les relations orchestre-auditeurs. Tout autour, une grappe de salles où le travail musical se fait. Pour ne pas rester une symphonie inachevée, la Cité attend une seconde salle de concerts de 2500 places…

La Cité de la musique ne répondrait pas complètement à sa vocation s'il n'existait pas en son sein le merveilleux Musée de

La cité, carrefour musical ouvert à tous, où chacun peut rencontrer sa musique et celle des autres.

la musique, ambiance feutrée, sobriété des couleurs, unité de tons dans les gris, éclairage subtil et tamisé.
Le Musée de la musique semble s'être glissé dans les murs de la Cité. On y approche l'histoire de la musique par l'œil et par l'oreille.
De la Renaissance au XX^{e} siècle, de Monteverdi à Stravinski, neuf moments clés sont présentés sur 2 800 mètres carrés répartis sur plusieurs niveaux. Dans un enchevêtrement d'espaces variés, une collection de 900 pièces est révélée. Le visiteur passe d'un grand plateau rythmé par des estrades où trônent pianos et clavecins à une antichambre où se cachent les chefs d'œuvre de Stradivarius, pour déboucher sous une grande voûte où une armée de violons se présentent au garde à vous.

Un outil au service de la musique

Tous ces lieux, ces outils, permettent la diffusion de la musique auprès d'un vaste public et tissent un lien indestructible avec les artistes. Pour que la diffusion de la musique soit plus complète, les expositions temporaires sont très variées. La dernière en date est « Musique populaire brésilienne », en lien avec l'année du Brésil en France.
C'est un voyage dans un univers foisonnant raconté grâce à des films documentaires, des photographies, des enregistrements à travers lesquels le rôle festif mais aussi social et politique de la musique au Brésil se comprend, et par là-même, toute la réalité et la contemporanéité de ce pays.
Avec cette exposition, la Cité confirme que l'ouverture aux différentes musiques du monde est un de ses points forts.

Enfin, si l'enseignement de la musique est la vocation du Conservatoire, les nombreux ateliers, activités permanentes et projets spécifiques, abrités dans la « Folie de la Musique », attirent un public très jeune qui vient en famille ou en groupe dans le cadre scolaire. Les enfants peuvent fabriquer leur propre instrument, s'initier sur les consoles de sons et même accéder à la composition.
En développant cinq principaux secteurs d'activité, information et documentation, développement du secteur jeunesse, accueil des futurs professionnels de la musique, intégration du musée et enfin diversité du programme des concerts, expositions et manifestations, la Cité de la Musique est un « work in progress » où rien ne reste figé et où beaucoup reste à faire… Heureusement !

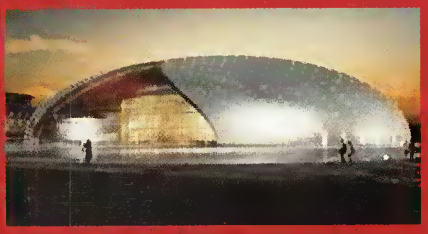
M.-J. P.

Cité de la musique
© Harald A. Jahn

Qui sont les visiteurs ?

Les 470 000 visiteurs annuels (133 000 au musée, 112 000 pour les concerts, 62 000 pour les centres d'information et de documentation, 28 000 à la Folie Musique) sont jeunes : 48 % ont moins de 24 ans et seulement 11 % sont des retraités. Ils sont pour une large part issus de professions artistiques et intellectuelles. La majorité viennent des environs (banlieues et arrondissements de Paris situés à proximité).

Un architecte français pour l'opéra de Pékin



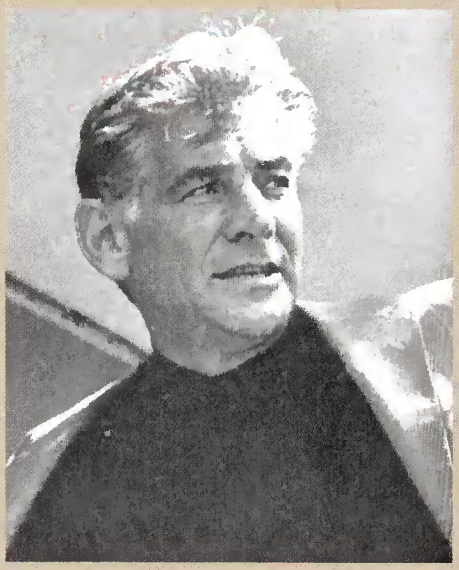
Voilà la formule magique du futur grand Opéra de Pékin. Son auteur, son concepteur, celui retenu depuis 1999 pour réaliser ce chantier titanesque n'est autre que l'architecte français Paul Andreu.
Né en 1938, ancien élève de l'école Polytechnique, Paul Andreu a depuis trente ans réalisé de nombreux bâtiments, de l'aéroport de Roissy à celui de Shanghai ou d'Abu Dhabi, du musée maritime d'Osaka à la Grande Arche de la Défense à Paris ; tous sont « des lieux de passage et de transit », des endroits où il faut définir chemins et routes, tunnels et passerelles, lumière et verre. Pour ce haut lieu culturel que sera le Grand Opéra de Pékin, bientôt achevé, emblématique car situé à deux pas de la Cité Interdite, mythique car devant plonger dans le passé multilinéaire de la Chine, Paul Andreu a appliqué les fondements de sa démarche artistique et scientifique.

Ce bâtiment à la forme « très pure, très mathématique » selon Paul Andreu, est un immense ellipsoïde de titane partagé en deux par une grande verrière courbe. Il est posé sur l'eau comme une île et on accède dans son intérieur, immense monde de courbes enchaînées et superposées par une galerie de verre située juste au-dessus du niveau de l'eau.

Dans ce projet, tout est défi technique ; par exemple, ses dimensions : 230 m de long, 130 m de large et 43 m de hauteur, rappellent celles du Grand Palais à Paris ou encore son acoustique...
Mais dans ces difficultés, Paul Andreu trouve l'inspiration et ancre l'originalité de son œuvre. Un exemple : les tuiles en titane conçues pour faciliter l'écoulement des eaux sont une reproduction des cuirasses des guerriers en terre cuite de X'ian sculptées au troisième siècle avant J.-C. !

par Stella Baruk

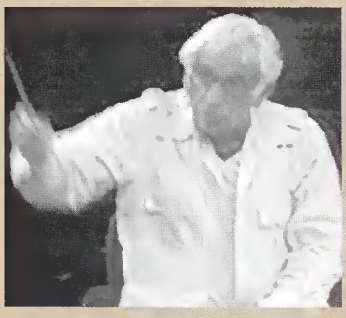
Léonard Bernstein



Léonard Bernstein (1919-1990), c'est l'auteur de *West Side Story*, œuvre qui déjà suffirait à sa gloire. Ce qu'on connaît moins de lui, c'est l'art du pédagogue qui sait faire rire les enfants en dévoilant par exemple l'humour de Haydn dans une succession de notes ou de rythmes ; c'est l'intelligence du théoricien qui essaie, à la question sans réponse posée par Charles Ives*, de proposer précisément des élements de réponse**.

Charles Ives demande : « Où va la musique ? ». « D'où vient-elle ? », se demande Bernstein en préalable. Fasciné par les hypothèses chomskiennes sur les origines du langage, il essaie de trouver une monogenèse de la musique. « Pourquoi sommes-nous si nombreux à vouloir constamment expliquer la beauté de la musique, en la dépossédant ainsi apparemment de son mystère ? Le fait est que la musique n'est pas uniquement un art mystérieux et métaphorique ; elle est également née de la science. Elle se compose d'éléments mathématiquement mesurables : fréquences, durées, décibels, intervalles. C'est pourquoi toute explication de la musique doit combiner les mathématiques et l'esthétique, exactement comme la linguistique combine les mathématiques et la philosophie, ou la sociologie, ou d'autres disciplines encore… »

Le fait est que lire Bernstein n'enlève à la musique rien de son mystère. Mais grâce à l'analyse qu'il propose de chefs d'œuvre célèbres autant que de musiques populaires, rendant lumineuses à l'oreille formes et structures, il s'ajoute à celui que l'on éprouve déjà un bonheur que l'on connaît bien en mathématiques : celui d'une certaine lecture du monde qui ajoute l'intelligibilité à l'émotion.



* Charles Ives (1874-1954), compositeur américain, a publié en 1906 *The Unanswered Question*.

** Dans une série de six conférences faites à Harvard, réunies sous le titre *La question sans réponse*, Laffont, Paris, 1982.

Alain Connes, pianiste

© CNRS Photothèque
Jérome Chatin

On ne présente plus Alain Connes, mathématicien hors du commun, médaille Fields 1982, prix Crafoord 2001 et enfin médaille d'or du CNRS en 2004. On connait moins en lui le pianiste, l'amoureux de la musique qui nous livre ici quelques réflexions sur cet art.

Musique libératrice

« Il y a d'autres activités [que les mathématiques] dans la vie d'un chercheur ! La concentration fatigue. La musique, par exemple, permet de se libérer d'une certaine anxiété suscitée par cet excès de concentration. C'est ce qui m'arrive quand je joue du piano, surtout quand j'improvise. J'ai appris le piano à 5 ans, dans la ville de Draguignan où j'ai passé ma petite enfance. Puis je l'ai interrompu a 8 ans lorsque mon père, qui pensait que c'était préférable pour mon éducation, s'est installé à Marseille, adoptant pour la circonstance une vie dangereuse : d'inspecteur des contributions, il est devenu chef d'une brigade d'intervention qui arrêtait des trafiquants. En reprenant le piano à 20 ans, je n'avais rien perdu de mes qualités d'oreille (je peux jouer n'importe quel air de musique d'oreille), mais j'ai eu du mal à me remettre à la discipline du solfège. »

Des maths à la musique : un passage sans rupture

« À passer des mathématiques à la musique, on ne ressent pas de véritable rupture. La similitude des structures ne peut être niée. Il y a là quelque chose de très profond. Songez au développement en fractions continues de log 3/log 2 et à la partition du *Clavier bien tempéré* de J.-S. Bach. Mais j'ajouterai que le contact précoce avec la musique prépare à la profondeur du raisonnement mathématique.

On peut percevoir l'élaboration de l'algèbre à travers la musique. Il est crucial pour un enfant d'être exposé très tôt à la musique. Vers l'âge de 5-6 ans, exposer un enfant à la musique permet d'équilibrer la prépondérance du sens de la vue et la richesse incroyable qu'un enfant acquiert à partir de la vue qui donc est reliée à la géométrie. Cela permet de l'équilibrer par l'algèbre. La musique, elle, s'inscrit dans le temps exactement comme l'algèbre s'inscrit dans le temps.

Dans les mathématiques, il y a cette dualité fondamentale entre, d'un côté, la géométrie qui correspond aux arts visuels, à une intuition immédiate. D'un autre côté, il y a l'algèbre qui possede une temporalité, et s'inscrit dans le temps, par exemple dans le calcul, qui est très proche du langage, et qui en a la précision diabolique. »

© CNRS Photothèque
Jérome Chatin

Femmes et musique

L'un des points communs entre la musique et les mathématiques est que les femmes ont beaucoup de mal à y être reconnues. Pourtant, encore très récemment, les études musicales et la pratique d'un instrument étaient recommandées aux jeunes filles. Les compositeurs – contrairement aux mathématiciens – ont besoin d'un orchestre ou de chanteurs pour être leurs interprètes. Mais de là à permettre aux femmes de s'imposer comme créatrices... Voici quelques portraits de femmes qui transcendèrent ces difficultés.

Élisabeth Jacquet de la Guerre (1624-1729), formée par Lulli, épouse de Marin de la Guerre, organiste de Saint-Severin, elle dut attendre la mort de son mari en 1704 pour voir publiés un *Te Deum* et de magnifiques sonates pour violons et basse.

Fanny Mendelssohn (1805-1847), pianiste précoce, a 15 ans quand son père lui dit ceci : « La musique deviendra peut-être pour lui [Félix] son métier, alors que pour toi elle doit seulement rester un agrément mais jamais la base de ton existence et de tes actes.»
La jeune fille forme son frère et compose des romances sans paroles dont elle lui laisse la paternité. Plus de 400 pièces extrêmement gracieuses et enthousiastes, dont beaucoup de *lieder,* l'ont rendue célèbre dès leur publication, à la mort de son père en 1845.

Clara Schumann (1819-1896), épouse de Robert Schumann. Malgré les tentatives de son père pour ruiner sa carrière de virtuose et empêcher son mariage, elle prendra, dès sa majorité, son indépendance, jouant dans toute l'Europe, influençant Brahms, composant pièces pour piano et mélodies, ce que Robert n'appréciera d'ailleurs guère.

Augusta Holmès (1847-1903) : belle et volcanique pianiste contralto qui sut émouvoir Liszt, Wagner et Saint-Saens. Elle fut la maîtresse de Catulle Mendès dont elle eut 5 enfants, ce qui ne l'empêcha pas d'écrire quelque 130 mélodies, une symphonie récompensée par la Ville de Paris, plusieurs délicieux poèmes symphoniques et 3 opéras dont la grandiloquence est toute wagnérienne.
Elle eut à subir une cabale contre l'admission des auteurs femmes à l'opéra et la misogynie de Vincent d'Indy.

Téresa Carreno, vénézuélienne (1855-1917), pianiste et compositeur, si célèbre qu'elle fut pleurée à sa mort à l'égal de Simon Bolivar, son compatriote.

Cécile Chaminade (1857-1944), pianiste et compositeur de mélodies, surannées mais élégantes, et d'une musique de chambre à grand caractère.

Alma Mahler (1879-1964) pianiste, chanteuse et mélodiste (plus de cent *lieder*), elle épousa Gustave Malher qui la tyrannisa et arrêta quasiment sa carrière. Maurice Ravel lui dédia sa *Valse*.

Lili Boulanger (1893-1918) enfant précoce, surdouée, Elle fut la première femme a obtenir le Grand Prix de Rome pour la musique malgré tous les préjugés de l'époque.
Ses psaumes, ses mélodies et sa cantate « Faust et Hélène » sont considérés comme des chefs d'œuvre de spiritualité et de poésie. Minée par la tuberculose, elle meurt à 25 ans après 3 ans de travail de composition acharné, très en avance sur son temps.

Une adresse :
Union des femmes professeurs et compositeurs, 100 avenue de Villiers, 75017 Paris.

Germaine Tailleferre (1892-1983) dut se cacher de son père pour suivre les cours du conservatoire. Prix de contrepoint à 20 ans, elle est fondatrice du groupe des Six. Pianiste, compositrice (*Les mariés de la Tour Eiffel*), elle mêle respect des traditions musicales et utilisation instinctive de la polytonalité. Sa musique a séduit les plus illustres interprètes, d'Arthur Rubinstein à Alfred Cortot.

Femmes (et musiques) actuelles

2005. Les hommes et les femmes bénéficient enfin d'un traitement égal dans tous les domaines et le féminisme peut mourir de sa belle mort... Trève de plaisanterie et parcourons du regard le paysage musical actuel. Les grands noms de la musique contemporaine ? Encore des hommes. Le jazz ? Certes, il s'y trouve une pleïade de merveilleuses chanteuses, quelques femmes pianistes, mais les instruments (batterie, basse, saxo, trompette...) restent le domaine réservé de ces messieurs et la composition est toujours signée au masculin. Aventurons-nous sur des territoires plus fraîchement explorés. Le rock se souvient de Janis Joplin, adulée à l'égal d'un Jimi Hendrix (et qui eut le privilège de mourir d'overdose à 27 ans, comme lui). Plus récemment encore, Neneh Cherry (fille du grand trompettiste de jazz Don Cherry) a ouvert la voie aux filles dans l'univers ultra-machiste du rap. En pop, le loufoque Prince a eu le mérite de s'entourer d'excellentes instrumentistes femmes, telles que la percussioniste Sheila E., qui furent ainsi révélées au public. L'Islandaise Björk, compositrice surdouée et volcanique, règne sur l'électro. Au rayon « musiques du monde » (en gros, tout ce qui ne vient ni d'Europe occidentale, ni des USA), la Malienne Rokia Traoré a gagné le respect de ses pairs en venant mêler à nos sonorités folk celles de son pays. Enfin l'inclassable Meshell Ndegeocello tient la dragée haute à ses congénères bassistes. Un signe d'espoir ?

G.O.

par Gaël Octavia

Variations autour du cube

Un cube, douze arêtes, douze notes. Stéphane Lahaye, guitariste, part de cette forme géométrique familière : le cube, et la traduit en musique. *Tangente* lui a demandé d'expliquer sa démarche.

Au mois de mars 2005, le centre culturel Jean-Cocteau de la commune des Lilas a reçu les *Variations autour des arêtes du cube*, une double création artistique, plastique et musicale, pour une exposition d'un genre nouveau au cœur de laquelle se trouvaient, une fois n'est pas coutume, les mathématiques. C'était là le fruit de la collaboration entre un sculpteur, Alfredo Munoz, et un musicien, Stéphane Lahaye.

Alfredo Munoz s'est intéressé à la possibilité de délimiter le cube et donc de donner une réalité à son volume à partir de ses arêtes, en le vidant justement de ce volume. Ensuite il a éliminé progressivement et partiellement les arêtes de manière à montrer comment celles-ci sont génératrices de plans, de même que les plans génèrent les volumes. De cette façon, « on démontre comment une forme modulaire peut être représentée sans que toutes ses parties soient présentes », explique-t-il en établissant la relation entre module et espace. L'algèbre et la combinatoire sous-jacentes (il y a autant de variations que de combinaisons d'arêtes) permettront à Stéphane Lahaye de jouer cette fois avec des notes.

Combinaisons rythmiques

Au départ du travail de Stéphane Lahaye, il y a la musique occidentale, sa gamme tempérée et le parti de faire correspondre à chacune de ses 12 notes une des 12 arêtes du cube. Le musicien commence par préciser qu'il a abordé cette traduction de manière intuitive autant que mathématique. « Mes connaissances dans cette discipline sont moyennes », confesse-t-il.

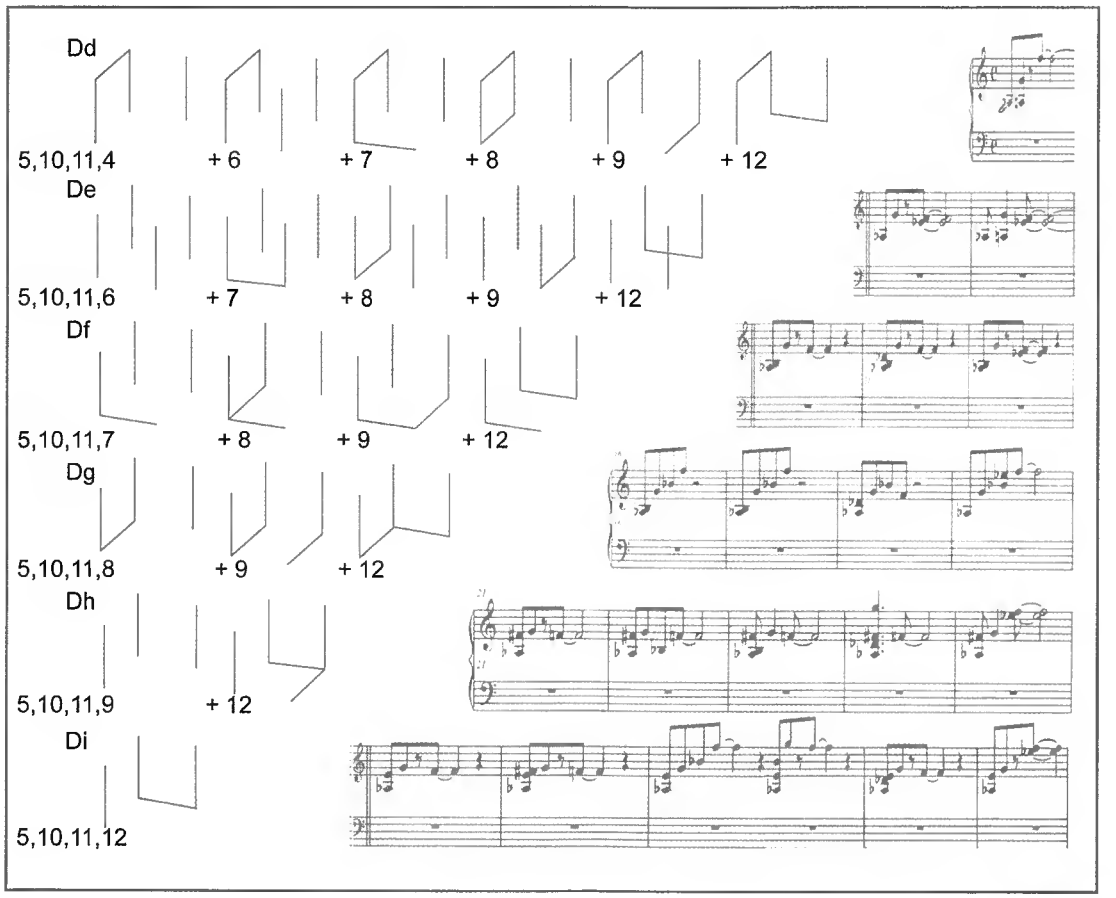
Et il poursuit : « Mon écriture musicale s'est construite sur un corpus de variations crées par Alfredo Munoz à partir de matrices de 3 arêtes constantes auxquelles on adjoint une 4^{e} puis une 5^{e} arête (voir schéma ci-contre). On obtient ainsi 45 variations par matrice. Ce travail de combinatoire

a été pensé et concrétisé par Alfredo Munoz sous différentes formes graphiques et plastiques. »

Ensuite, la correspondance entre les notes et les arêtes étant établie, il fallut organiser la « pâte sonore » dont il disposait, c'est à dire faire les choix de correspondance et de cohérence entre le placement des arêtes dans l'espace et celui des notes dans le temps. « C'est la part mathématique du travail », selon Stéphane Lahaye. « Les possibilités d'équivalence sont assurément très nombreuses – j'en ai choisi 3 ou 4 dont j'ai poussé plus ou moins loin le codage espace/rythme. » Dans le résultat obtenu, chaque planche de 45 variations possède un caractère rythmique qui peut être très répétitif, mais il n'y a jamais de répétition à l'identique d'un motif. « Chacune constitue le texte musical d'un morceau court et libre de forme comme une bagatelle », conclut-il.

A travers cette expérience, c'est non seulement la qualité d'outil de création artistique que l'on reconnaît aux mathématiques, mais aussi leur faculté de créer un pont entre deux disciplines en devenant leur dénominateur commun.

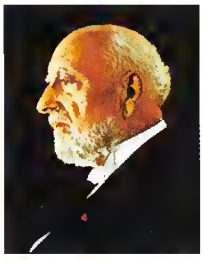
G.O.



par Dominique Souder

Ernest Ansermet
mathématicien et musicien

Le chef d'orchestre suisse Ernest Ansermet (1883-1969) a eu une vie exceptionnelle consacrée au service de la musique contemporaine (essentiellement française et russe) et à l'éducation musicale du pays romand tout entier. Regard sur un parcours où émergent un patriotisme ardent et une générosité sans pareils

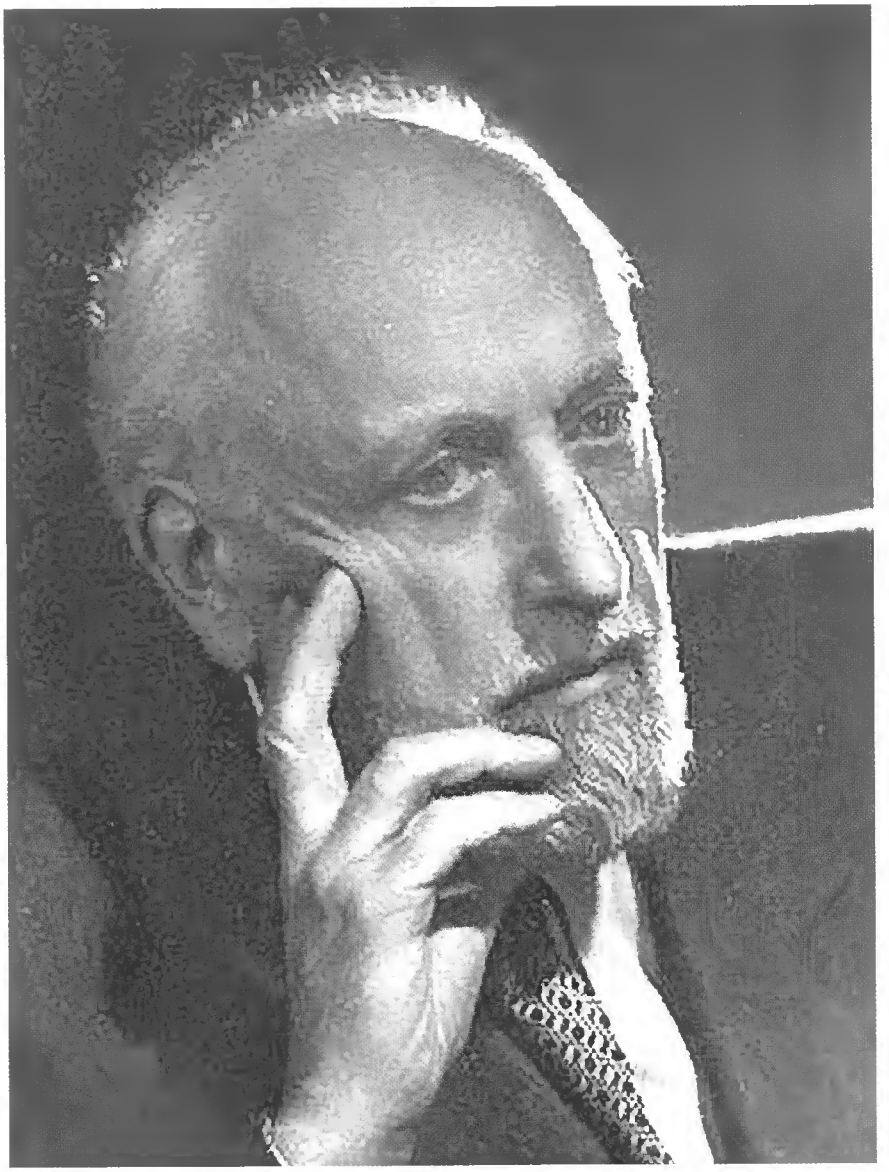

Ernest Ansermet

Ansermet ne se sentait pas une vocation de chef d'orchestre, mais beaucoup plus de mathématicien. Il possédait une vraie aptitude à raisonner dans l'abstraction, sans l'aide de données matérielles mais sans perdre non plus de vue la nécessité d'être en accord avec l'expérience de la vie.

Ansermet obtint sa licence é-sciences mathématiques et physiques à l'âge de 20 ans à l'Université de Lausanne. Il enseigna pendant trois ans au collège de cette ville, puis alla poursuivre ses études à la Sorbonne tout en fréquentant le Conservatoire de Paris. De retour en Suisse, il réussit le concours lui permettant d'être nommé professeur de mathématiques au collège classique de Lausanne. Il n'y resta qu'un an, et mit fin à ses hésitations : la musique l'emporta. Le poste de chef d'orchestre du Kursaal de Montreux était vacant, il l'obtint après concours. Ses débuts sont auréolés de réussite. Il se lie d'amitié avec Ramuz, rencontre Igor Stravinsky, assiste à l'écriture du *Sacre du Printemps*, de *Petrouchka*, et de *Renard*. Il fera une autre rencontre à Genève : Diaghilev, qui lui proposera de diriger l'orchestre des Ballets Russes, une formation qu'il emmènera partout dans le monde.

Ansermet a connu tous les honneurs dont peut rêver un chef d'orchestre. Il a créé plusieurs de œuvres de Stravinsky : *L'histoire du soldat*, *Le chant du rossignol*, *Pulcinella*, *Renard*, *Les Noces*, *Le Capriccio pour piano*, *La Messe*, dirigé d'autres grandes œuvres : *Parade* de Satie, *Le tricorne* de Falla, *Chout* de Prokofiev, *Le viol de Lucrèce*, la *Cantata misericordium* de Britten.

Mais c'est certainement dans la défense de la musique suisse qu'il s'illustre avec le plus de passion. On peut dire que c'est lui qui a imposé Arthur Honegger (*Horace victorieux*, *Chant de joie*, *Rugby*, *Pacifie* 231, qui lui est



dédié) et Frank Martin (Symphonie *In Terra Pax*, *La Tempête*...). Son engagement en faveur de la musique suisse ne se limite pas à l'adoubement des grands musiciens. Ernest Ansermet était heureux de parler aux jeunes, très librement et de les initier par exemple dans des émissions de radio scolaires. Il a patronné durant de nombreuses années les Jeunesses Musicales Suisses.

Au lieu d'accepter des offres des États-Unis et de faire une carrière triomphale et lucrative outre-Atlantique, Ansermet a décidé de créer à Genève son propre orchestre pour assurer la vie musicale en Suisse romande. Il le dirigera de 1918 à sa mort en 1969, malgré les difficultés économiques, les rivalités entre Lausanne et Genève et les deux guerres mondiales. La plupart des meilleurs chefs d'orchestre y seront invités.

La musique est un des plus grands et des plus beaux mystères humains. Reconnaître ce mystère, c'est un peu le transformer en problème.

Igor Stravinsky (1882-1971) *L'oiseau de feu* - ballet. New Philharmonia Orchestra Direction : Ernest Ansermet

Musique et conscience humaine

Entre 1947 et 1962, Ansermet a rédigé un monumental ouvrage, *Les fondements de la musique dans la conscience humaine*, qui résume les recherches philosophiques de sa vie entière.

La musique est un des plus grands et des plus beaux mystères humains. Reconnaître ce mystère, c'est un peu le transformer en problème.

Ansermet part de la conscience de la musique chez l'homme pour déterminer les matériaux et les éléments de la musique et des sons qui la composent, alors que toutes les esthétiques musicales avaient jusque là procédé à l'inverse. Le secret de la musique ainsi dévoilé est aussi le secret de l'homme, et peut-être celui de Dieu.

Cet ouvrage de 600 pages, agrémenté de 200 pages de notes, est difficile.

Voici quelques questions abordées par Ansermet dans cet ouvrage

— Comment se présente à la conscience l'échelle des sons ?
— Quelle est la genèse de la gamme diatonique dans notre conscience, et quel rôle y jouent la quinte et la quarte ?
— Le système tempéré est-il vraiment issu d'une distorsion de notre perception naturelle des intervalles et sinon comment le justifier ?

Ansermet n'a pas cherché à établir une vérité conforme aux exigences d'un modèle mathématique ; il a adopté un style de communication mathématique pour faire sentir des phénomènes musicaux.

Percevoir les logarithmes

Exemple, extrait de l'*introduction* : « Percevoir une quinte c'est percevoir le rapport de fréquence 3/2, une quarte 4/3 et l'on constate que si l'on entend successivement une quinte et une quarte, on a perçu l'intervalle 2/1 à savoir le produit $3/2 \times 4/3 = 2$.

Mais l'impression auditive est que quinte et quarte se sont ajoutées l'une à l'autre et que l'octave en est la somme. Ce phénomène n'est explicable que si l'on admet que l'on perçoit, non les rapports des fréquences, mais leurs logarithmes.

Le produit de deux nombres se signifiant en effet par la somme de leurs logarithmes ».

La fonction logarithme, chez Ansermet, est donc utilisée comme un lieu de rencontre entre l'expérience vécue et l'expérience scientifique.

La teneur affective de la musique, traduite intuitivement par une figure ou une formule, ne satisfait pas le caractère systématique que l'on attend d'une théorie, d'où de nombreux malentendus qui desservent ce livre. D'un côté, nombre de musiciens professionnels étrangers aux mathématiques n'ont pas été sensibles à son approche, de l'autre, beaucoup de mathématiciens ont rejeté des idées rendues à leurs yeux trop subjectives par la référence permanente au domaine de la conscience.

D. S.

Le dernier disque d'Ernest Ansermet, en 1968, quelques semaines avant sa mort, est consacré à *L'Oiseau de feu* de son ami Igor Stravinsky.
L'intérêt de ce remarquable enregistrement est double. En effet, l'œuvre de Stravinsky est couplée avec sa répétition dirigée et commentée (en anglais) par Ansermet.

Le Galiléo

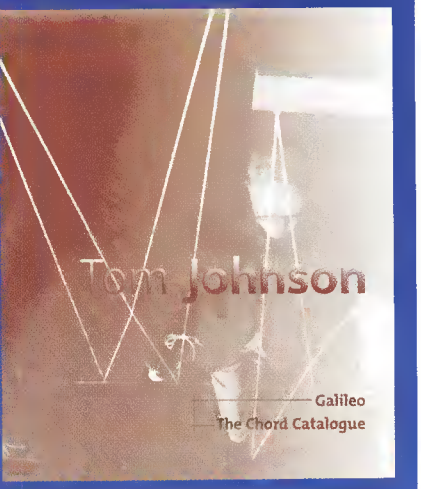
Tom Johnson est né dans le Colorado en 1939. Après avoir étudié aux USA, il s'installe en 1983 à Paris où il vit et travaille depuis.

Il est connu comme un musicien minimaliste, puisqu'il travaille avec du matériel toujours réduit. Cependant il procède de manière extrêmement logique, recherchant formules, permutations, algorithmes, séquences prévisibles. On connaît son *Opéra de 4 notes* joué régulièrement depuis 30 ans et de nombreuses pièces parmi lesquelles on peut noter : *Histoires à dormir debout*, les *Rational Melodies*, les *Duos à compter*...

Il travaille avec le mathématicien Jean-Paul Allouche qui l'aide à trouver les algorithmes pour concrétiser et faire aboutir ses idées musicales.

A l'occasion d'un colloque « Arts et Sciences » qui se tint en 2001 à Bordeaux, Tom Johnson présenta son *Galiléo*.

Galiléo est à la fois le nom de l'instrument et de la composition, tous les deux conçus par Tom Johnson. Pourquoi *Galiléo* ? Selon une vieille tradition Galilée aurait observé dans la cathédrale de Pise les balancements des lustres pendus à la voûte au lieu d'écouter le sermon. Il eut l'idée de compter les oscillations, remarqua que leurs longueurs étaient différentes et inversement proportionnelles au carré de la longueur du pendule.



L'instrument de Tom Johnson est constitué de cinq pendules disposés sur une barre de 260 cm de long et de 4 m de haut. Les longueurs des cinq pendules sont soigneusement calculées selon la formule découverte par Galilée il y a 500 ans afin que leurs oscillations soient dans les rapports de 1, 2/3, 3 /4 et 4/5.

Tom Johnson fait sonner ses cinq « cloches » selon des polyrythmes précisément réfléchis et sentis. Sous ses baguettes, les sons naissent, vibrent, se prolongent, se mêlent, se répondent et nous pénètrent comme le feraient des milliers de cloches et clochettes.

par Marie-José Pestel

Michel Deneuve cristaliste

Musicien inclassable, compositeur-interprète hors du temps, il faut tout inventer pour parler de Michel Deneuve, l'instrument, les sonorités : ces mots nouveaux sonnent clair comme l'eau, éclatent de lumière comme les reflets. Michel Deneuve est « cristaliste ».

Le Cristal Baschet est l'instrument du XX^e siècle. Il a tout juste cinquante ans. C'est un enfant dans le monde de la musique.

Pourtant tout avait commencé dans la plus pure tradition musicale… Né en 1955, Michel Deneuve, peu adapté au système scolaire, va très lentement, avec la musique, sortir de ce mal-être qui semble si profond en lui. Avec le conservatoire et une formation musicale classique, les premières armes de solfège et surtout de percussions, il découvre les joies de la réussite. Les sons, ceux qu'il entend, ceux qu'il produit, ceux qui résonnent dans sa tête, lui donnent des ailes, envie de comprendre, envie de faire.

La Rencontre…

Quand il rencontre, en 1977, les frères Baschet et leur orgue de cristal, il sait tout de suite que vivent là, dans le cœur du cristal, les sonorités qu'il recherchait depuis toujours. C'est la rencontre de sa vie. Michel Deneuve va lui consacrer son être et son art. Il sait, il est certain que les qualités et les possibilités de cet instrument sont exceptionnelles.

« Chaque siècle a son instrument, dit-il. Comme le piano est celui du XVIII^e et le saxo celui du XIX^e. Le cristal Baschet est l'instrument du XX^e siècle. Rendez-vous compte à quel point il est jeune, il a tout juste cinquante ans. C'est un enfant dans le monde de la musique ».

Le Cristal n'est comparable à aucun autre instrument. Il ouvre de nouvelles portes dans l'univers sonore et mélodique. À son écoute, nul ne reste indifférent. Ces sons inhabituels pénètrent au plus profond de l'émotionnel. Michel Deneuve découvre puis apprivoise les *sculptures sonores* des Baschet. Au prix d'un travail acharné, il comprend peu à peu ce qui se passe au cœur de cet instrument, le long de ses tiges de cristal, dans ses grands auvents qui projettent le son loin dans l'espace.

Le Cristal Baschet mérite tous les soins, tous les sacrifices. Pour lui, il inventera avec Yvonne Lasry le clavier

Bernard et François Baschet se sont attachés depuis les années 50 à démontrer les rapports existant entre le son et la forme. Après des études approfondies dans de vieux livres d'acoustique, ils décident de construire de nouveaux systèmes afin d'avoir les sons dans l'oreille et les montages dans les doigts. Leur travail porte sur trois éléments essentiels :

- L'élément vibrant : tige métallique encastrée dans une masse ; la hauteur de la note est fixée par la longueur de la tige et par la position d'une masselotte à l'endroit du nœud de vibration.
- L'élément excitateur : percussion ou archet. La mise en vibration est réalisée soit par percussion sur une famille de structures sonores, soit par un archet de verre, ou tiges de cristal, que l'on frotte avec des doigts humidifiés.
- L'amplificateur pour diffuser le son : en forme de cône. Chaque matériau est choisi en fonction de sa courbe de réponse et des fréquences qu'il ajoute : carton, acier inoxydable, plaque de verre, duralumin…

Les « structures sonores Baschet » mettent ainsi la sculpture au service du son. Pour quatre octaves et demie, un clavier de 56 fines baguettes montées sur une structure de métal, vont permettre l'expression musicale par le glissement des doigts humectés d'eau. De l'extrême aigu à l'extrême grave, la palette sonore est riche en couleurs et en harmoniques. Les résonances graves parcourent une immense feuille en inox formée à la main ; toutes ses courbures sont étudiées au bénéfice du caractère sonore. Les médiums et les aigus se prolongent au travers des deux amplificateurs en fibre de verre ou de carbone. Les vibrations ainsi dirigées vers les résonateurs acoustiques déterminent le timbre et le volume. De la structure métallique dépend la conduction du son. Les tiges métalliques sont destinées à entrer en vibration, une tension courte pour les aigus et de plus en plus longues selon les graves. L'eau, contenue dans une coupelle placée sous le clavier, permet à l'interprète de garder les doigts et les baguettes humides afin d'accrocher le son.

horizontal, il multipliera ses possibilités en le faisant passer de trois gammes à quatre et demi et puis cinq… Sous l'œil attentif de Bernard et François Baschet qui pourraient être ses grands-parents, Michel Deneuve se pose des questions, travaille en solitaire, ouvre la voie. En lutherie, on sait peu de choses. Plus on en découvre, plus le chemin de la connaissance semble long. Le parcours est semé d'obstacles. Il faut la conviction de chacun pour traverser envers et contre tout ces années où les instruments électriques, synthétiseurs et autres systèmes électroacoustiques font rage. Laissons à François Baschet la responsabilité de son appréciation à leur sujet : « Ce qui est à la mode est destiné à être démodé. »

Des années de travail au service d'un instrument

Pendant toutes ces années, Michel Deneuve étudie les compositions du premier cristaliste Jacques Lasry. En parallèle à l'amélioration de l'instrument, il met au point une technique de jeu révélant les qualités du cristal et surtout compose un répertoire soliste et avec orchestre. Si certaines œuvres de Bach, Mozart, Purcell, Stravisky, Ravel et bien d'autres s'adaptent à merveille à ce nouveau support polyphonique, des compositions spécifiques à cet instrument s'imposent. Son

Quelques CD de Michel Deneuve.

Michel Deneuve et son orgue de cristal.

intérêt pour la musique contemporaine, sa formation classique et ses goûts allant bien au delà de la culture occidentale, permettent à Deneuve de composer un répertoire pour le Cristal Baschet où des courants musicaux se côtoient, se complètent, sans jamais s'opposer. Ses œuvres sont profondément évocatrices. Sur son dernier CD se côtoient *Danses de Dunes* pour Cristal, violon, contrebasses, percussions et voix, et *Mae d'Agua*, sur le thème de l'eau, bien sûr, qui s'accorde tellement au cristal.

Michel Deneuve prend confiance, sort de la solitude. Des musiciens composent pour lui et lui-même se diversifie . Il écrit pour le théâtre, la chorégraphie, la poésie, le cinéma,...

Reste alors à faire partager et à assurer la transmission de ce nouveau savoir. Depuis 1997, la Cité de la musique a inclus le Cristal dans son musée. Avec les frères Baschet, il forme de jeunes assistants à la facture du Cristal, et, pour les futurs interprètes, une école de Cristal a ouvert ses portes au sein de l'Académie internationale d'art, musique et danse, dirigée par Gérard Sutton. Ensemble, ils conçoivent un programme pédagogique original avec un matériel accessible aux enfants. L'ensemble des 14 structures sonores offre une palette de sons que l'on peut assembler sans connaissance préalable du solfège. Alors au cœur de ces échanges avec des jeunes, parfois même des jeunes handicapés, le rêve se réalise : « Le Cristal ne doit pas rester seul au stade de curiosité ; il mérite tellement mieux que cela ».

Le programme pour les années à venir semble lui donner raison. Et la conviction du grand Yehudi Menuhin : « Dans la constellation des possibles, il y a les inventions des frères Baschet dont la grande collection des sculptures sonores a créé un large vocabulaire de sons nouveaux et de timbres spéciaux. Le musicien en chacun de nous jouera un rôle en décidant si ces nouveaux sons feront partie des traditions musicales et sculpturales du futur. »

M.-J. P.

Des problèmes à votre portée

Solutions page 136

HS1101. Qui suis-je ? ○

Je suis né à Leipzig, j'ai étudié le droit, je suis contemporain de Jean-Sébastien Bach, je suis aussi connu comme mathématicien que comme philosophe, on me doit une bonne part du calcul différentiel et intégral, je me suis pas mal mêlé de politique.

Qui suis-je ? ☐ Newton ☐ Leibniz ☐ Descartes ☐ Kant ☐ Milton

HS1102. L'harmonie des genres ✔

Dominique, Claude, Olive et Camille forment un sympathique quatuor.

- Les joueurs d'alto et de violoncelle sont fiancés.
- Ceux de piano et de violon sont frère et soeur.
- Les deux musiciens dont les instruments sont les plus volumineux rivalisent toujours par la longueur de leurs moustaches.
- Les prénoms les plus courts correspondent aux instruments les plus petits.

Si vous écrivez les prénoms des hommes du quatuor, combien de lettres tracerez-vous en tout ?

HS1103. Le quatuor ✔

Trouver un ensemble de quatre nombres entiers positifs non nuls tous différents tels que :

- deux d'entre eux ont pour somme 45
- deux d'entre eux ont pour différence 45
- deux d'entre eux ont pour produit 45
- deux d'entre eux ont pour quotient 45

S'il existe plusieurs réponses possibles, vous les chercherez toutes. Vous donnerez les quatre entiers dans l'ordre croissant.

HS1104. Schubert ✔✔

Franz Schubert, auteur de la *Symphonie Inachevée*, est né le 31 janvier 1797.

Il a vécu moins d'un demi-siècle, mais plus d'un quart de siècle. Il est décédé un 19 novembre.

Son âge quand il est mort n'était divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5, ni par 7.

L'année de sa mort fut une année bissextile non divisible par 5.

Nous fêterons le bicentenaire de sa mort lors d'une année divisible par 3.

En quelle année Schubert est-il mort ?

Sources des problèmes

- ***Kangourou des mathématiques*** **(HS1101).**
- ***Championnat des Jeux Mathématiques et Logiques*** **(HS1102, HS1103).**
- **Tournoi *Mathématique de Saint-Michel en l'Herm* (HS1104)**

Niveau de difficulté :

○ très facile ✔ facile ✔✔ pas facile ✔✔✔ difficile ✔✔✔✔ très difficile.

par Gilles Cohen

Du club de maths au CD professionnel

Professeur de maths dans un collège alsacien, chanteur, auteur et compositeur, Arnaud Chatirichvili décida un jour de se servir de la musique pour prouver que les mathématiques étaient belles et vivantes. Le CD qui en résulta connut un certain succès. Récit d'une belle aventure...

Arnaud Chatirichvili est professeur de mathématiques. Mais pas n'importe lequel, un professeur comme on les aime à *Tangente*, ouvert sur les élèves, sur les autres disciplines, sur la littérature comme la musique. Pourtant, Arnaud Chatirichvili connaissait à peine *Tangente* quand je suis allé l'interviewer. Il a parcouru tout seul le chemin qui s'impose à tout pédagogue digne de ce nom aujourd'hui : il n'y a pas d'enseignement des mathématiques sans une immersion dans un contexte culturel plus général, qui permet de les présenter comme une composante d'un ensemble dont les élèves sont familiers plutôt que comme une vérité désincarnée imposant ses diktats depuis un ghetto inaccessible...

Évidemment, ses origines et sa personnalité ne sont pas étrangères à ses choix pédagogiques. Quand on est fils d'un immigré géorgien qui, quittant sa chaire de philosophie, a dû travailler à la chaîne chez Peugeot avant de se reconvertir dans la technologie et d'enseigner au sein d'un centre de formation du même constructeur automobile, on a forcément une autre vision des choses. Et quand on a pour mère la fille d'une modeste famille de Mulhouse pour qui la langue française était le symbole de l'ascension sociale, au point qu'elle a embrassé la carrière de professeur du français, on nourrit pour notre langue des relations privilégiées.

C'est dans ce creuset qu'a été forgée la personnalité d'Arnaud Chatirichvili, faite à la fois de goût pour les sciences, pour la littérature, mais surtout pour la musique.

C'est facile d'apprendre quand on sait pourquoi

Pourtant, ces dernières relations-là avaient mal commencé. L'expérience de l'apprentissage du piano dès l'âge de six ans avait laissé un goût amer et

s'était soldée par un échec. Mais à quatorze ans, il apprenait à jouer de la guitare, comme on le faisait alors, en regardant les autres. Nourri de rock et de folk song, prenant pour modèles Jimi Hendrix et les interprètes des cinq ou six disques qu'il possédait et qu'il se repassait inlassablement, le jeune homme franchissait le pas à vingt ans en prenant un professeur de jazz qui allait discipliner ses talents de guitariste. Pourtant, ce n'est qu'à trente ans qu'il apprendrait enfin à lire la musique, à la faveur de cours de flûte classique qui allaient parfaire sa formation de musicien. Et là, nouvelle découverte ! Une technique, certes, mais surtout un secret de la pédagogie : comme c'est facile d'apprendre quand on sait pourquoi !

La chanson, ce n'est pas seulement la musique. C'est aussi la poésie d'un texte qui vient l'épouser pour former un tout indissociable. Le modèle d'Arnaud Chatirichvili, peu connu des jeunes générations, constitua pour lui l'illumination d'une harmonie admirable entre la parole et le texte : les frères Jacques. Il leur vouait une adoration, au point de louer une place de théâtre à l'année pour ne pas manquer leur tournée d'adieu, et de s'introduire à l'entracte pour voir le spectacle une deuxième fois.

La poésie, Arnaud Chatirichvili la débusque partout, et naturellement dans les mathématiques. Son nirvana ? La topologie ! Ces objets qu'on peut déformer (presque) à volonté sans rien leur faire perdre de leurs propriétés le fascinent ! Et lorsqu'on est sensible à la poésie des mathématiques, quoi de plus facile que de transmettre son goût à ses élèves ? Il explique en ces termes le

Arnaud Chatirichvili le jour de l'interview

rapport entre enseigner les mathématiques et écrire des chansons : « Dans les deux domaines, il s'agit de *faire surgir l'image*. Aussi bien faire voir *ce qui se passe si on fait agir la translation de vecteur AB* que faire voir la scène décrite par :

On n'a même pas ouvert notre livre
Pour corriger nos devoirs
Qu'on a déjà l' cou tordu pour suivre
Le voisin qui raconte une histoire ...
(extrait de *Bavardages*)

Une leçon, comme une chanson doivent avoir une dynamique : l'auditeur doit en avoir rapidement identifié et compris l'enjeu , et il doit être *dans l'attente de la suite*. Il faut que *ça lui parle*. Enfin, la chute de la chanson doit couronner le tout comme l'énoncé d'un théorème vient faire la synthèse d'une bonne séance de Travaux Dirigés. »

La carrière artistique d'Arnaud Chatirichvili est donc indissociable de sa profession d'enseignant. Son premier disque, il l'a enregistré comme guitariste au sein d'un

J'ai les boules

1 . J'ai les boules
à cause de c't'interro écrite
j'ai les boules
qu'on a d'main en mathématiques
j'ai les boules
j'ai peur de recevoir une bulle
j'ai les boules
pourtant j'vous jure que j'suis pas nul

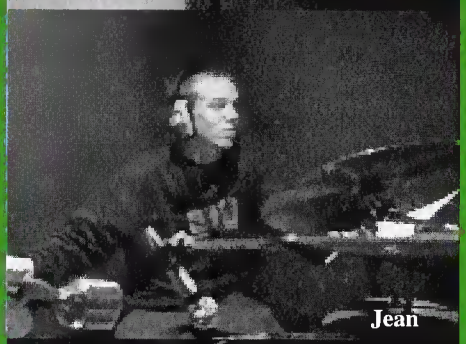
Refrain

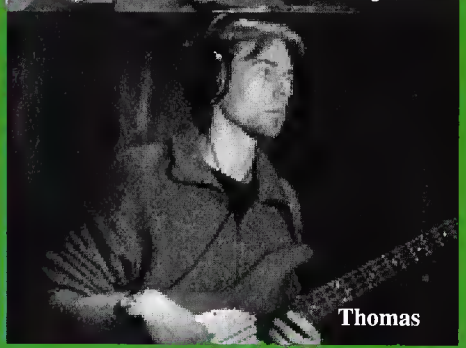
C'est toujours comme ça,
On ne peut pas passer une bonne soirée chez soi, une soirée sympa, (bis)
C'est toujours comme ça !

2 . J'ai les boules
il faut que j'révise ma leçon
j'ai les boules
et que je la sache pour de bon
j'ai les boules
et aussi faire mes exercices
j'ai les boules
c'est quoi déjà la médiatrice ?

Refrain
...

Mathias


Jean


Thomas

orchestre de jazz monté avec des élèves par Hubert Schang, saxophoniste de son état mais aussi professeur d'histoire géographie dans un établissement huppé de Strasbourg. Jouer dans un « big band » de jazz ! Un rêve d'enfance exaucé, et une première expérience de l'enregistrement. Pas si compliqué que cela ! Alors quand, à la suite d'une grande fête de son collège, il a préparé et réalisé un spectacle musical grandiose, il a eu l'idée d'enregistrer un disque pour que ce travail exceptionnel ne soit pas perdu.

Des chansons inspirées de leur expérience de prof

Ce travail, c'est avant tout le sien et celui de son compère Patrick Hecklen, professeur d'allemand et grand amateur de musique. Ils ont écrit à eux deux l'ensemble des chansons, essentiellement inspirées de leur expérience avec les élèves. Ainsi, quand Arnaud Chatirichvili distribuait ses planches polycopiées aux élèves pour qu'ils y tracent des figures, il s'en trouvait toujours un pour poser la question fatidique : « Monsieur, est-ce que c'est noté ? ». *C'est noté ?* est la chanson phare qui fait la jaquette du CD. Et *Équilibre fragile*, une chanson de Patrick Hecklen, décrit un moment de vive tension au sein du collège.

Mais si les élèves ont inspiré plus ou moins directement la plupart des chansons, ils n'ont pas vraiment participé à leur conception. En revanche, les élèves et plus généralement le collège ont été étroitement associés à la réalisation du disque.

Plus de 60 intervenants

On trouve d'ailleurs dans le générique plus de 60 personnes, amateurs et professionnels mêlés, pour un travail qui se voulait authentiquement professionnel.

La base est constituée de (presque) professionnels : le bassiste et le batteur d'un « vrai » groupe (les rythmiques du Gymnase Jean Sturm), Patrick Hecklen au piano et au synthé, Arnaud Chatirichvili à la guitare. Comme chanteur, Mathias Hecklen-Obernesser (le fils de Patrick), premier violon à l'orchestre symphonique de Strasbourg et chanteur plus que doué. Et puis la chorale d'Erstein, enrichie d'un groupe rock, « blue spirit », monté par quatre anciennes élèves d'Arnaud Chatirichvili. Et puis quelques pros du show biz qui l'ont aidé alors qu'il était débutant, et qu'il a voulu associer à son disque (quand on est sentimental…).
Les autres, ce sont des amateurs, hissés au niveau à force d'entraînement : la chorale des professeurs, une classe de troisième, ou encore les concepteurs de la pochette, un photographe et deux collégiens, dont une jeune fille de quatrième technologique, qui avait remporté le concours organisé par le professeur d'arts plastiques.

Dans l'ensemble, le projet fut accueilli avec enthousiasme. Le maire d'Erstein fut persuadé en moins d'un quart d'heure que l'entreprise procédait de la culture régionale et favoriserait le renom de la commune. Il commanda 200 disques ! Le bouche à oreille fonctionna et l'équilibre financier du disque ne fut pas difficile à atteindre. La qualité des chansons fut

Le rap des maths

1. J'ai une maladie, un drôle de virus
Qui me ronge la tête des oreilles aux sinus
C'est un genre de cancer implacable et vicieux
Mais qui d'après les profs est rarement contagieux

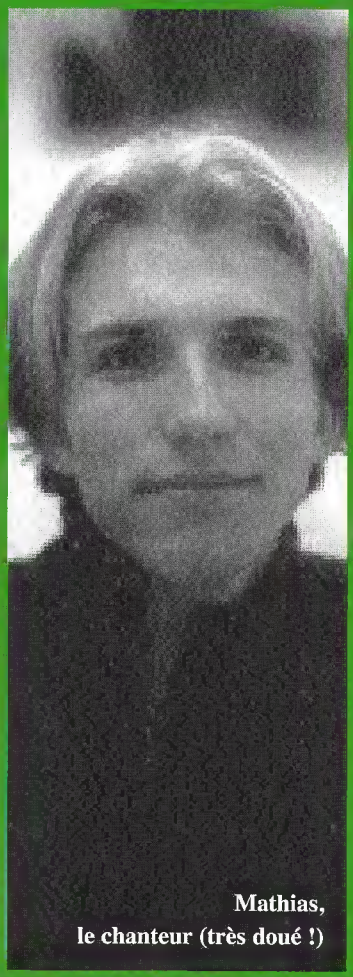
Refrain
C'est les mathématiques ! (4 fois)
[...]

3. Ça me prend au réveil, à peine un œil ouvert
Il me faut ma ration de fonctions linéaires
Au début, c'était peu et puis la dose augmente
Il me faut sans arrêt varier ma constante

Refrain
C'est les mathématiques ! (4 fois)
[...]

5. Pendant tout'la journée et malgré mes efforts
Les maths ont envahi mon esprit et mon corps
Comme j'ai le cerveau lent, vers le soir je dérape
Voilà pourquoi ce soir je vous chante ce rap

Refrain
C'est les mathématiques ! (4 fois)
[...]



Mathias, le chanteur (très doué !)

également distinguée puisque *C'est noté* obtint en 1999 le troisième prix au concours francophone de la chanson pour enfants. Finalement, sous sa forme auto-éditée, le disque s'écoula à 1000 exemplaires.

Un jour, un collègue suggéra à Arnaud Chatirichvili de proposer sa musique aux Editons Fuzeau, spécalistes de la chanson pour la jeunesse. L'éditeur fut séduit et un 4 titres intitulé *Prendre le temps* fut enregistré en 2001... et s'écoula à plus de 2000 exemplaires ! On y trouve des chansons destinées aux enfants de 6 à 12 ans, teintées d'humour, qui illustrent ou amorcent une réflexion sur des questions sérieuses : la différence, l'expression artistique, l'étranger, le temps.

En 2004, Arnaud Chatirichvili recevait encore des nouvelles réjouissantes de son disque *C'est noté*. Les organisateurs d'un colloque stéphanois sur l'enseignement le contactèrent pour lui demander les partitions de ses chansons. En retour, il reçut un enregistrement de la fête de clôture. Quel bonheur d'entendre parmi les chansons de célébrités comme

Henri Dès, *Bavardages* et *Le rap des maths*, ses propres compositions jouées et mises en scène par une centaine d'élèves !

A l'heure actuelle, il reste encore quelques exemplaires de *C'est noté ?* et on peut en faire l'acquisition en s'adresant directement à Arnaud Chatirichvili (cf. encadré ci-contre, en bas de la page).

Retour aux maths

Ayant ensuite quitté le collège Romain Rolland d'Erstein pour celui d'Ostwald, Arnaud Chatirichvili a bien sûr tenté de renouveler l'expérience dans son nouvel établissement. Pendant un an, il a écrit des chansons à partir de ce que ses élèves vivaient en classe, souvent grâce à des idées transmises par eux. Malheureusement, il semble que l'initiative du professeur musicien ait été mal perçue par... le professeur de musique ! La belle aventure dut prendre fin, preuve qu'il y a toujours un risque à déambuler sur un terrain qui n'est pas, officiellement, le vôtre.

Aujourd'hui, même s'il compose encore un peu, ne serait-ce que pour permettre à ses collègues de chanter à l'occasion des fêtes et des pots de départs, Arnaud le musicien fait une pause pour qu'Arnaud le mathématicien se consacre plus amplement à sa discipline, dont il est toujurs aussi amoureux. Il vise l'agréagtion et y fut admissible cette année.

G. C.

C'est noté ?

Refrain

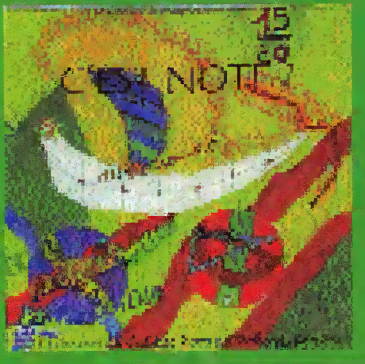
C'est noté ?
Ça compte dans la moyenne ?
C'est noté ?
Sinon, c'est pas la peine !

1. Quand on fait un devoir
En maths ou en français
En géo en histoire
En techno, en anglais,
Tout ce qui m'intéresse
C'que j'demande en premier
Au prof, à la maîtresse,
« Dites, est-ce que c'est noté ? ».

Refrain
[...]

4. Lorsque j'ai fait l'armée
Pour obéir au chef
Je voulais être noté
M'a mis son pied aux fesses...
J'ai été amoureux
Mais la belle m'a quitté
J'ai sû bien plus tard que
Elle notait mes baisers.

Refrain...



Pour 15 €, on peut se procurer le CD en écrivant à Arnaud Chatirichvili :
15 A rue Laurent Heydt 67380 Lingolsheim.

par Gilles Cohen

Francis Reynès, le matheux chantant

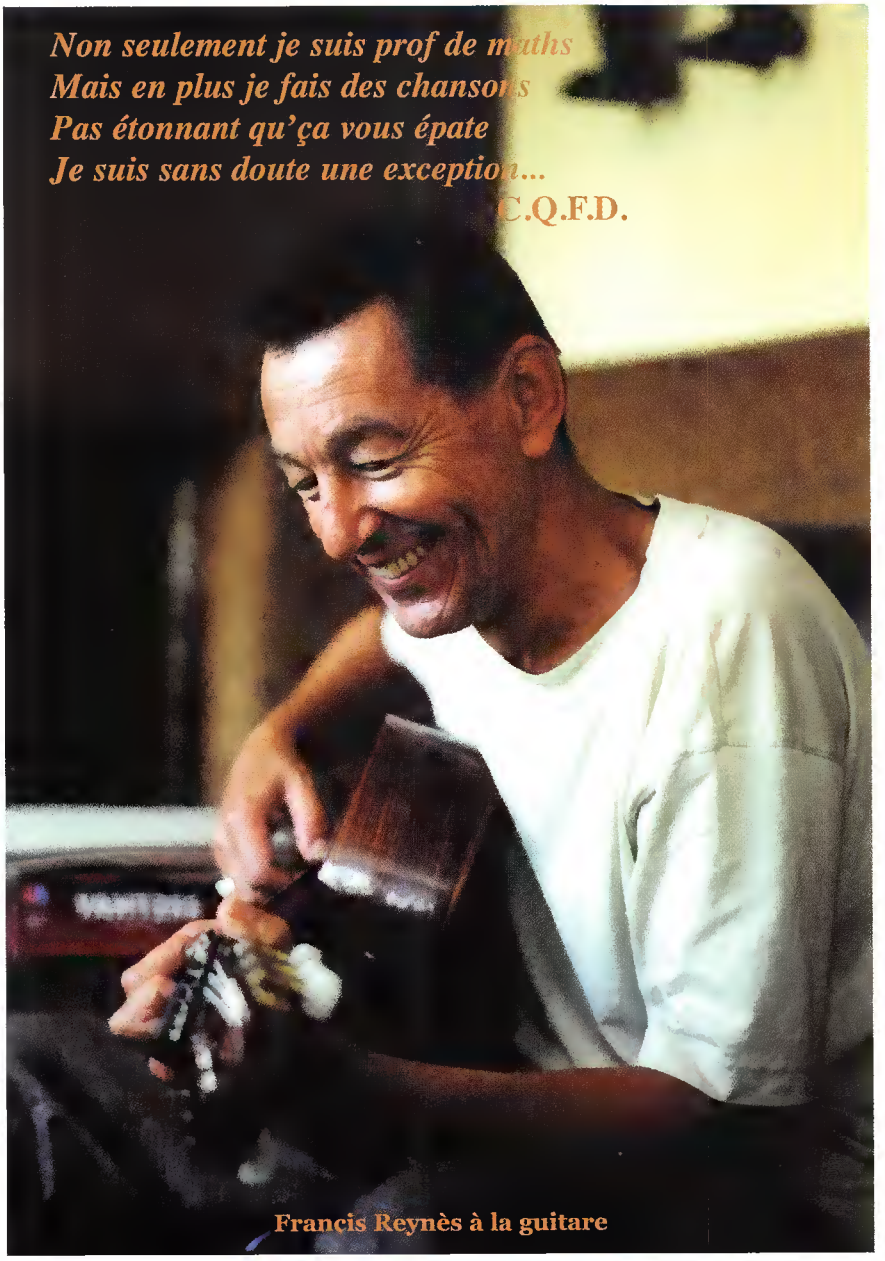
Tangente a rencontré Francis Reynès, un professeur de mathématiques amateur du dénommé Brassens mais aussi auteur et compositeur, qui se partage naturellement entre pédagogie et chanson.

Francis Reynès à Parthenay à l'occasion du Logic'Flip

Pendant de longues années, seuls ses proches avaient entendu la voix chaude de Francis Reynès – une voix qui rappelle Reggiani – interpréter, accompagnée d'accords de guitare, un répertoire qui mêle créations personnelles et chansons de Bobby Lapointe, Brassens, Ferré, Vian ou Ferrat. C'est en 1982, alors qu'il enseignait les mathématiques à Dakar, qu'il a franchi le pas. On cherchait un musicien dans une boîte de nuit, il connaissait le patron…

La suite, c'est une vie qui se partage entre l'enseignement et la chanson, cette « chair » qui lui paraît manquer aux mathématiques, esthétiques, certes, mais trop « désincarnées » à son goût. Bien sûr, il ne songe en aucun cas à abandonner son métier de professeur. S'il n'avait le collège Grand Air d'Arcachon, qui lui assure le quotidien, il faut bien reconnaître que ce serait un peu la galère...

Notre mathémusicien est pourtant très inspiré. Francis Reynès a déjà à son actif plusieurs CD réalisés en autoproduction. Dans les albums «Résonances», «La part des choses» et «La didactique mathématique», on trouve ses propres compositions.



Francis Reynès à la guitare

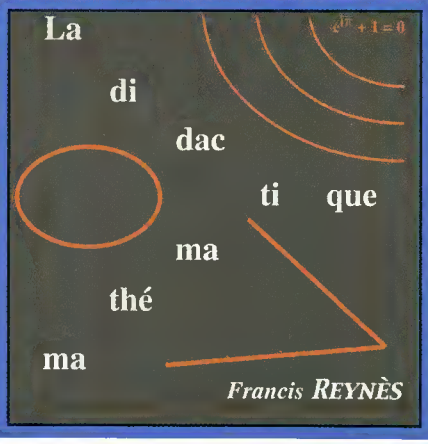
On peut se procurer les disques de Francis Reynès en lui écrivant à l'adresse : Francis Reynès, Résidence Plein Ciel, 33720 Arcachon.

L'occasion de découvrir que les mathématiques et le métier d'enseignant sont une véritable source d'inspiration. Dans «Hommage et fidélité», en revanche, il s'agit de chansons de Georges Brassens que le fameux poète n'interpréta jamais.

Quant à l'expérience de la scène, contact privilégié avec le public, Francis Reynès connait aussi : une cave bordelaise, devant un public assez jeune qui l'écoute en sirotant un verre, un concert lors de la fête de la musique, et quelques grands moments comme des prestations dans quelques festivals rendant hommage à Brassens : celui de

... Si je t'érige quelques vers
C'est que j'ai une dette envers
Ton inestimable férule
Je te le dis sans aucun calcul
Tu es une trop grande dame
Mais y a pas d'quoi en faire un drame
Tout compt' fait t'es mêm' sympathique
Bien qu' tu t'appelles Mathématique...

Tango elliptique



Fontenay-sous-Bois, celui de Vaison-la-encore celui de Romaine ou Tence, en Haute Loire.

Une vocation ?

Le public qu'il apprécie par dessus tout, ce sont ses élèves, tout heureux qu'il est de casser l'image stéréotypée que certains peuvent avoir du « prof de maths ». Et tout heureux de tenter de réparer par son comportement l'image négative des mathématiques que lui avaient inspirée certains de ses propres professeurs.

Devant cette masse de hiéroglyphes
Dont on soupçonne mal les beautés,
Je n'ai pas fait comme Sisyphe
J'suis redescendu d' l'autr' côté
Et j'ai voulu rendre lumineux
A des gosses qui s'raient emballés
C'qui m'avait paru si fumeux
Quand je m'y étais attelé

Et les élèves le lui rendent bien ! Ils viennent le chercher pour leurs fêtes, eux qui achètent ses disques, lui demandent de composer des chansons sur un thème qui leur tient à cœur.

Autodidacte

Pour Francis Reynès l'écriture est l'un des moments privilégiés de la vie. Il commence en général par le texte, qu'il compose en octosyllabes, et pour lequel il a acquis une telle expérience que la contrainte poétique, totalement intériorisée, n'affecte en rien sa soif de liberté. Et puis le texte, c'est le message, et Francis Reynès a tant à dire !
Puis il « colle » la musique par dessus. Comme pour sa voix, qu'il n'a jamais « travaillée » avec un professeur, Reynès est un autodidacte de la musique. Il n'a jamais appris à composer, pas même à jouer de la guitare qui pourtant ne le quitte jamais !
Son message, c'est la révolte devant l'injustice, c'est sa quête de l'amour, c'est la dérision devant les errements de notre monde, mais c'est aussi le jeu du langage et des sonorités, c'est l'émerveillement devant la nature et la façon dont l'homme parvient à la prévoir, voire à la discipliner – son idole est Feinmann, le prix Nobel de physique – , c'est l'éloge des mathématiques dans ce qu'elles ont d'utile aux progrès de notre monde.

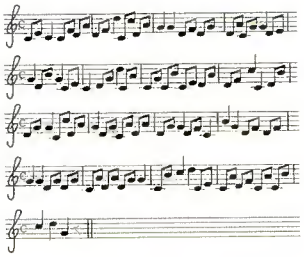
G. C.

Des problèmes à votre portée

Solutions page 136

HS1105. Cryptocitation ✔✔

Décryptez la citation de Beethoven codée dans la partition ci-dessous.



HS1106. Cryptarithme ✔✔✔

Comme dans tout cryptarithme, chaque lettre remplace toujours le même chiffre, chaque chiffre est toujours remplacé par la même lettre, et l'écriture d'aucun nombre ne commence par un zéro.

ORFEO + CARMEN = OPERA

Sources des problèmes

- *80 additions-mystères et autres surprises mathématiques*, Raymond Bloch, Éditions POLE (HS1105, HS1106)
- *Jeux & Stratégie* (HS1107, HS1108)

Les instruments de musique, Tapisserie des Gobelins, d'après un carnet de Rohner (Photo Giraudon).

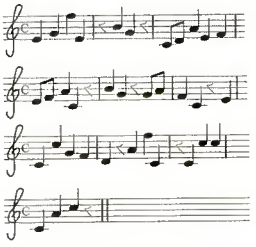
HS1107. Cryptarithme ✔✔✔

Comme dans tout cryptarithme, chaque lettre remplace toujours le même chiffre, chaque chiffre est toujours remplacé par la même lettre, et l'écriture d'aucun nombre ne commence par un zéro.

HECTOR + BERLIOZ = ECORCHE

HS1108. Cryptocitation ✔✔✔✔

Décryptez la citation de Nietzsche codée dans la partition ci-dessous.



Solutions

HS1101. Qui suis-je ?

Leibniz

HS1102. L'harmonie des genres

Le quatuor comprend un joueur d'alto, un violoncelliste, un pianiste et un violoniste (« un » étant ici neutre). Parmi ces quatre musiciens, il y a deux hommes et deux femmes (2 fiancés, et un frère et une sœur). Les deux hommes sont les musiciens dont les instruments sont les plus gros, puisque qu'ils sont pourvus de moustaches. Les deux femmes sont donc les instrumentistes ayant les instruments les plus petits et les prénoms les plus courts (Claude et Olive). On en déduit que les deux hommes s'appellent Dominique et Camille. Si on écrit les prénoms des deux hommes du quatuor, on tracera au total :

$9 + 7 =$ **16 lettres**.

HS1103. Le quatuor

Désignons par a et b les deux entiers strictement positifs ayant pour somme 45. On a alors $a < 45$ et $b < 45$. La différence de deux des quatre entiers étant égale à 45, l'un de ces entiers est supérieur à 45. désignons cet entier par c. On supposera donc $c > 45$. Si deux nombres ont pour somme 45, ces deux mêmes nombres ne peuvent avoir pour produit 45 : en effet, $45 = 1 \times 45 = 3 \times 15 = 5 \times 9$, et $45 + 1 \neq 45$, $15 + 3 \neq 45$, et $9 + 5 \neq 45$.
Parmi les deux nombres ayant pour produit 45, l'un est différent de a et de b, et l'autre est égal à a ou à b. Désignons par d le nombre différent de a et de b. On a donc $d \leqslant 45$ et $d \neq a$, $d \neq b$.
Le nombre 45 possède 6 diviseurs : 1, 3, 5, 9, 15, et 45.
• $d = 1$ est impossible, car ni a ni b ne peut prendre la valeur 45.
• $d = 3$ entraîne a ou $b = 15$, d'où b ou $a = 30$. Les valeurs possibles pour c sont alors 48, 60, ou 75. On vérifie qu'il n'existe aucune possibilité pour un quotient égal à 45.
• $d = 5$ entraîne a ou $b = 9$, d'où b ou $a = 36$. Les valeurs possibles pour c sont alors 50, 54, ou 81. On vérifie qu'il n'existe là non plus aucune possibilité pour un quotient égal à 45.
• $d = 9$ entraîne a ou $b = 5$, d'où b ou $a = 40$. Les valeurs possibles pour c sont alors 54, 50, ou 85. On vérifie qu'il n'existe là encore aucune possibilité pour un quotient égal à 45.
• $d = 15$ entraîne a ou $b = 3$, d'où b ou $a = 42$. Les valeurs possibles pour c sont alors 60, 48, ou 87. On vérifie qu'il n'existe toujours aucune possibilité pour un quotient égal à 45.

des problèmes

des pages 125 et 135

• $d = 45$ entraîne a ou $b = 1$, d'où b ou $a = 44$. Les valeurs possibles pour c sont alors 90, 46, ou 89. Chacune de ces possibilités mène à une solution :

(1, 44, 46, 45) : $1 + 44 = 45, 46 - 1 = 45,$
$1 \times 45 = 45, 45 : 1 = 45$
(1, 44, 89, 45) : $1 + 44 = 45, 89 - 44 = 45,$
$1 \times 45 = 45, 45 : 1 = 45$
(1, 44, 90, 45) : $1 + 44 = 45, 90 - 45 = 45,$
$1 \times 45 = 45, 45 : 1 = 45.$

Le problème possède donc **3 solutions** :
(1 ; 44 ; 45 ; 46), (1 ; 44 ; 45 ; 89), et (1 ; 44 ; 45 ; 90).

HS1104. Schubert

Schubert est mort entre 1822 et 1847.
Les années bissextiles non divisibles par 5 de cette période sont 1824 (il serait alors mort à 27 ans), 1828 (31 ans), 1832 (35 ans), 1836 (39 ans) et 1844 (47 ans). Parmi ces années, il faut éliminer 1824 (car 27 est divisible par 3), 1832 (car 35 est divisible par 5), 1836 (car 39 est divisible par 3) et 1844 (car 2044) n'est pas divisible par 3). Par contre, on vérifie que 31 n'est divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5, ni par 7, et que 2028 est divisible par 3. Schubert est donc mort en **1828**.

105. Cryptocitation

La méthode consiste à tester les couples (C ; O) de chiffres consécutifs, puis les paires A/P qui donnent E et R. Il reste à essayer les valeurs possibles pour N/S et F/M. On aboutit à une solution unique où le 6 et le 7 sont permutables :

24 692 + 184 793 = 209 485.

106. Cryptarithme

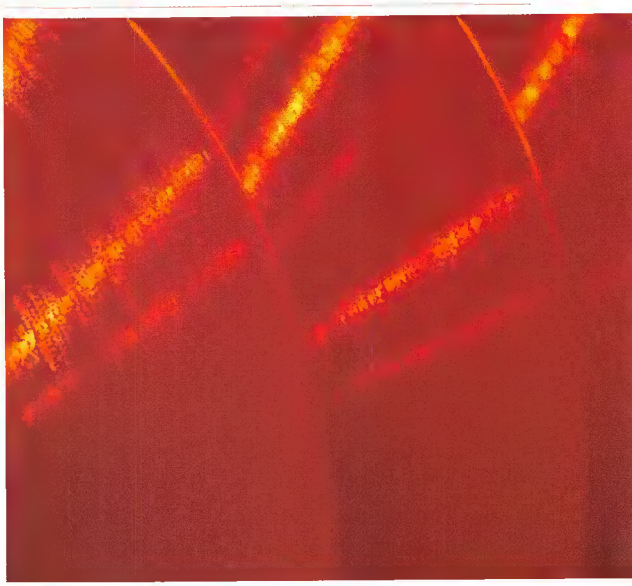
(B ; E) sont consécutifs. On teste les valeurs de O (de 0 à 9) qui donnent H (deux valeurs possibles). puis on essaie les couples B/C avec B = E – 1. On cherche ensuite les couples R/Z et T/I et on obtient L. On aboutit à l'unique solution suivante, où 1 et 9 sont permutables :

540 128 + 3 487 926 = 4 028 054.

HS1107. Cryptarithme

La musique est une révélation plus haute que toute sagesse et toute philosophie.

HS1108. Cryptocitation



TANGENTE
LE MAGAZINE DES MATHÉMATIQUES

ABONNEMENT « BASE »
6 numéros par an
+ des suppléments « éducation »
+ 1 calendrier mathématique

ABONNEMENT « PLUS »
Abonnement base
+ 4 hors-séries simples

ABONNEMENT « SUPERPLUS »
Abonnement base +
4 hors-séries
« Bibliothèque Tangente »

Une économie de 30 € par an

ÉCONOMISEZ 30 € par an

TANGENTE JEUX & STRATÉGIE

Pour les amateurs
de jeux intelligents
Bimestriel.
6 numéros
par an

+ un cadeau !!

TANGENTE SUP

Pour ceux qui veulent
aller plus loin...
4 numéros par an

Bulletin d'abonnement à retourner à

codif : POLE **HS 22** Tangente - BP 10214 - 95106 Argenteuil cedex

Nom ..... **Prénom** .....

Établissement .....

Adresse .....

Code Postal ..... **Ville** .....

Profession ..... **E-mail** .....

	FRANCE		HORS MÉTROPOLE	
	1 AN	2 ANS	1 AN	2 ANS
Tangente	❒ 30 €	❒ 55 €	❒ 40 €	❒ 75 €
Tangente PLUS	❒ 50 €	❒ 90 €	❒ 65 €	❒ 120 €
Tangente SUPERPLUS*	❒ 75 €	❒ 145 €	❒ 95 €	❒ 185 €
Tangente JEUX & STRATÉGIE	❒ 30 €	❒ 51 €	❒ 40 €	❒ 73 €
❒ Je recevrai en cadeau un CD-Rom *Logissimo* (8 jeux logiques d'une valeur 22 €).				
Tangente SUP	❒ 18,5 €	❒ 35 €	❒ 23 €	❒ 43 €
Réduction Abon à 3 titres*	❒ -5 €	❒ -10 €	❒ -5 €	❒ -10 €

* En cas d'abonnement groupé à 3 titres sur le même bon de commande, bénéficiez d'une réduction de 5 € par an !

❒ À partir du numéro en cours ❒ À partir du numéro .....

Total à payer .....

Je joins mon paiement par (établissements scolaires, joindre bon de commande administratif) :

❑ Chèque (uniquement **payable en France**)

❑ Carte (à partir de 30 €) numéro : |_|_|_|_| |_|_|_|_| |_|_|_|_| |_|_|_|_|

Date et Signature :

Expiration le : ...../.....

Tangente

Publié par Les Éditions POLE
SAS au capital de 40 000 euros
Siège social :
80, bd Saint-Michel
75006 Paris
Commission paritaire : 1006 K 80883
Dépôt légal à parution

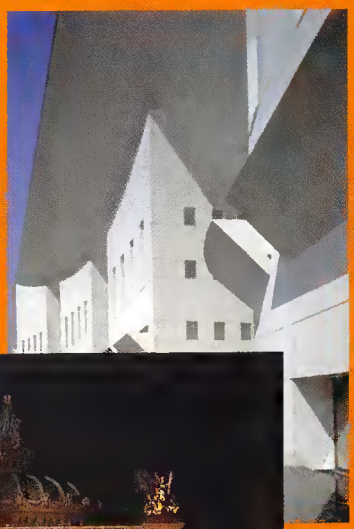
Directeur de Publication
et de la Rédaction
Gilles COHEN

Secrétaire générale de rédaction
Gaël OCTAVIA

Comité de rédaction
Stella BARUK,
Élisabeth BUSSER,
Joseph CÉSARO,
Michel CRITON,
Denis GUEDJ,
Jean-Christophe NOVELLI,
Marie-José PESTEL,
Claude SAUSER,
Daniel TEMAM,
Norbert VERDIER,
Alain ZALMANSKI.

Abonnements
Martine QUEDE
Tel : 01 39 98 83 50
Fax : 01 39 98 83 52

Maquette et iconographie
Laurence GAUTHIER (couverture),
Natacha LAUGIER
CNRS Photothèque, Jérome CHATIN
Autres photos : droits réservés



Achevé d'imprimer pour le compte des Éditions POLE
sur les presses de l'imprimerie Louisjean, 05000 Gap
Imprimé en France - Dépôt légal 398 - Juin 2005

Maths & musique

- Les fondements
- La composition
- La technologie
- Lieux et figures

La musique est sans doute le domaine artistique qui se prête le mieux à un regard mathématique. Le rythme n'est-il pas la mesure du temps ? L'harmonie, terme à la fois mathématique et musical, ne régit-elle pas la hauteur du son, l'échelle, l'équilibre ?
Chez les Pythagoriciens, la musique était nombre. Elle a ouvert la voie aux proportions, nos fractions d'aujourd'hui. Fourier lui conféra définitivement son caractère mathématique en décomposant le son en sinusoïdes.
La symétrie vint inspirer Bach, Haydn et Mozart comme, plus tard, permutations, groupes prirent place dans les compositions de Boulez, Ansermet et Xenakis.
Grâce au foisonnement de l'informatique, l'exploration musicale est désormais sans limites.

ISBN 2-84884-033-1
9 782848 840338

Prix : 18 €

POLE

l'angente